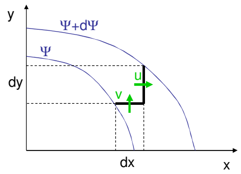
Inkompresszibilis áramlások számítása

Kristóf Gergely

2010. október

Az áramfüggvény (Ψ)



Jelentése 2D-ben: térfogatáram 1 m széles tartományban.

Egy Ψ=állandó vonalon átáramlás nincs, tehát a Ψ szintvonalai áramvonalak.

Két, egymáshoz közeli áramvonalra az alábbi összefüggés érvényes:

$$d\psi = u\,dy - v\,dx$$

Ugyanakkor Ψ teljes differenciálja:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

Ebből megkapjuk Ψ definícióját 2D áramlás esetére:

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad és \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u}$$

Puszta létével kielégíti a kontinuitási egyenletet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

A nyomás-sebesség kapcsolat problémája

A diszkretizációval kapott algebrai egyenletrendszer megoldására iterációs módszert fogunk alkalmazni.
Egy további egyszerűsítési lehetőség:
Szegregált iteráció: minden mezőváltozóra különálló egyenletrendszert oldunk meg, amelyben a többi mezőváltozót állandónak tekintjük.

Kontinuitás:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Navier-Stokes egyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\vec{v}) = -\frac{\partial p/\rho_0}{\partial x} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla u) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v\vec{v}) = -\frac{\partial p/\rho_0}{\partial y} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla v) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w\vec{v}) = -\frac{\partial p/\rho_0}{\partial z} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla w) + g_z$$

Ez az egyenletrendszer nem alkalmas szegregált iterációra.
Szükségünk lenne a nyomásmező meghatározására alkalmas alapegyenletre.

3D áramlások esetében

3D-ben Ψ-t vektorként definiáljuk: **Vektorpotenciál**.

$$\underline{v} = \nabla \times \underline{\psi}$$

Síkáramlás esetén visszakapjuk az eredeti definíciót:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial \psi_y}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial z}} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \cancel{\frac{\partial \psi_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial y}} \end{pmatrix} \rightarrow$$

azaz síkáramlás esetén:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad és \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

A kontinuitás 3D-ben is automatikusan kielégül:

$$\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\psi} \equiv 0$$

2D-ben további előny, hogy a mezőváltozók száma csökken (u,v →Ψ).
Sajnos ez az előny 3D-ben elvész.

Két szokásos megközelítés

- Ψ-ω módszer
  Az mozgásgyenletből kiküszöböljük a nyomásmezőt.
  A kontinuitást egy potenciál függvény bevezetésével oldjuk meg.
- Nyomáskorrekciós módszerek
  A kontinuitási egyenlet helyett a nyomásmező meghatározására alkalmas alapegyenletet oldunk meg.

Az örvényesség (ω)

Az örvényesség 3D-ben:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2D-ben ω-nak csak z komponense van:

tehát:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Az áramfüggvénnyel kifejezve:

$$\boxed{\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}$$

ez egy **Poisson-egyenlet az áramfüggvényre**.

Egy érdekes speciális eset: potenciálos áramlásokra

$$\underline{\omega} = 0$$

Csak egy Laplace-egyenletet kell megoldani 2D esetben.
Analitikus megoldások, analógiák...

$$\Delta \psi = 0$$

Az örvénytranszportegyenlet (ÖTE)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját 2D-ben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\#\#\#=-\frac{\partial^2 p/\rho_0}{\partial x\partial y}+\mathbf{v}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\#\#\#=-\frac{\partial^2 p/\rho_0}{\partial x\partial y}+\mathbf{v}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}+\#\#\#=0+\mathbf{v}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}=(\nabla\cdot\underline{v})\,\omega=0$$

Az örvénytranszport egyenlet 2D alakja. (3D-ben bonyolultabb).

$$\frac{d\omega}{dt}=\mathbf{v}\,\Delta\omega$$

A kinematikai viszkozitás az örvényesség vezetési tényezője... Pl: határrétegben.

Alkalmas-e a nyomásegyenlet a kontinuitás kiváltására?

Diszkretizáljuk a mozgásegyenletet egyszerűség kedvéért időben elsőrendű pontosságú integrálási sémával (Euler-módszerrel):

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\Delta t\left(f_i^n-\tilde\nabla\big|_i P^n\right)$$

A nyomásegyenlet diszkrét alakja:

$$\tilde\Delta P^n=\tilde\nabla\cdot f_i^n$$

Először oldjuk meg a nyomásegyenletet P^n-re, majd frissítsü-k a sebességet!

Divergenciamentes lesz az új sebességmező?

$$\tilde\nabla\cdot u_i^{n+1}=\tilde\nabla\cdot u_i^n+\Delta t\underbrace{\left(\tilde\nabla\cdot f_i^n-\tilde\Delta P^n\right)}_{\approx 0}$$

≈0 csak közelítőleg tudjuk megoldani!

A nyomásegyenletet megoldásának hibája felhalmozódva jelentkezik a kontinuitásban.

Megoldási módszer stacionárius áramlásra

Poisson-egyenlet Ψ-re:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega$$

ÖTE-ba beírjuk a Ψ-vel kifejezett u-t és v-t:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\mathbf{v}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)$$

Szegregált megoldási módszer:

$$\psi^0,\omega^0\xrightarrow{Poisson}\psi^1,\omega^0\xrightarrow{ÖTE}\psi^1,\omega^1\xrightarrow{Poisson}\psi^2,\omega^1\ \ldots$$

Peremfeltételek Ψ-re:
- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

ω-ra:
- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

Probléma: nyomás peremfeltételt nem tudunk előírni, mert p nem szerepel az egyenletekben. A nyomásmezőt utólag kell meghatározni.

A hiba felhalmozódása elkerülhető...

Nekünk nem a nyomásegyenlet fontos, hanem a kontinuitás teljesítése.

Az eredeti nyomásegyenlet helyett az alábbi korrigált egyenletet kell megoldani:

$$\tilde\Delta P^n=\tilde\nabla\cdot f_i^n+\frac{1}{\Delta t}\tilde\nabla\cdot u_i^n$$

majd a mozgásegyenletből számoljuk az új sebességeket:

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\Delta t\left(f_i^n-\tilde\nabla\big|_i P^n\right)$$

Ellenőrizzük az új sebesség divergenciamentességét:

$$\tilde\nabla\cdot u_i^{n+1}=\Delta t\underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t}\tilde\nabla\cdot u_i^n+\tilde\nabla\cdot f_i^n-\tilde\Delta P^n\right]}_{\approx 0}$$

≈0 nyomásegyenlet

Csak akkora a kontinuitás hibája, amit a korrigált nyomásegyenlet megoldásakor elkövetünk az n-edik lépésben.

Nyomás alapú megoldók
A nyomásegyenlet

Kontinuitás:

$$\nabla\cdot\underline{u}=0$$

Mozgásegyenlet 2D-ben, g=0 esetén:

$$\frac{\partial\underline{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\underline{u}\otimes\underline{u})=-\nabla(p/\rho_0)+\mathbf{v}\Delta\underline{u}$$

Új jelölések: $P=p/\rho_0$ és $\underline{f}$ (értelemszerűen).

$$\frac{\partial\underline{u}}{\partial t}=\underline{f}-\nabla P$$

Képezzük a mozgásegyenlet divergenciáját felhasználva, hogy: $\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\underline{u}=0$

$$\Delta P=\nabla\cdot\underline{f}$$

Ez egy Poisson-egyenlet P-re.
Nyomásegyenlet

Ez alkalmas pl. a nyomásmező meghatározására Ψ-ω módszer esetén.

Projekciós módszer

Ugyanez a módszer a szokásosabb jelölésekkel:

1. lépés kiszámítjuk: $u*_i=u_i^n+\Delta t\,f_i^n$ u* pszeudosebesség

2.lépés **megoldjuk**: $\tilde\Delta P^n=\frac{1}{\Delta t}\tilde\nabla\cdot u*_i \longrightarrow P^n$

3. lépés kiszámítjuk: $u_i^{n+1}=u*_i-\Delta t\tilde\nabla\big|_i P^n$

Ellenőrizzük! $\tilde\nabla\cdot u_i^{n+1}=\Delta t\underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t}\tilde\nabla\cdot u*_i-\tilde\Delta P^n\right]}$

Tényleg ezt oldjuk meg a 2. lépésben.

Stacionárius áramlás

- **Kis időlépések:**
  Az előző módszer csak kis időlépésekkel tud működni. (Feltételesen stabil séma.)
  Ha az áramlás stacionárius, vagy lassan változik, akkor nagyon sok időlépést kell tenni, amíg elérjük a stacionárius állapotot.
- **Hiányzik az időbeli derivált:**
  Stacionárius áramlások esetén kihagyjuk az időbeli deriváltakat és a hely szerinti deriváltakból számoljuk ki az új sebességmezőt.

P-u iteráció stacionárius áramlásra

Szeretnénk, ha az n+1-edik iterációs lépésben minél pontosabban teljesülnének:

$$A_P\, u_{i,P}^{n+1} + \sum A_\ell\, u_{i,\ell}^{n+1} = Q_i - \tilde{\nabla}\Big|_i P^{n+1} \qquad \text{és} \qquad \tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = 0$$

Csak a régi nyomást tudjuk felhasználni... (itt még nem lesz pontos a kontinuitás).
u* kezdőértékeként u^n-et használjuk.

$$A_P\, u_{i,P}^{*} + \sum A_\ell\, u_{i,\ell}^{*} = Q_i - \tilde{\nabla}\Big|_i P^{n} \longrightarrow u_{\mathrm{i,P}}^{*}$$

1.lépés

$$u_{i,P}^{*} = \frac{Q_i - \sum A_\ell\, u_{i,\ell}^{*}}{A_P} - \frac{1}{A_P}\tilde{\nabla}\Big|_i P^n$$

$$u_{i,P}^{*} = \breve{u}_{i,P} - \frac{1}{A_P}\tilde{\nabla}\Big|_i P^n$$

u^{n+1} hasonló képlettel közelíthető az új nyomásgradiens alapján:

$$u_{i,P}^{\mathrm{n+1}} \approx \breve{u}_{i,P} - \frac{1}{A_P}\tilde{\nabla}\Big|_i P^{n+1}$$

3.lépés

u^{n+1} elégítse ki a kontinuitást!
Képezzük a numerikus divergenciáját:

2.lépés

$$\tilde{\Delta} P^{n+1} = A_P \tilde{\nabla} \cdot \breve{u}_i \longrightarrow P^{n+1}$$

A 3. lépésben elhanyagolt szomszédok miatt most a mozgásegyenlet nem pontos, ezért 1,2,3 lépéseket ismételni kell.

Szokásos módszerek

- **Belső iteráció**:
  Közelítő megoldást kell alkalmazni az 1. és a 2. lépés egyenletrendszerének megoldására, azonban a belső iteráció csak 1 lépést szokott tenni.
- **Nyomáskorrekciós egyenlet:**
  Nyomás helyett nyomáskorrekcióra szokásos megoldani a Poisson-egyenletet. (Numerikus előnyök.)
- **SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLER, PISO**
- **Időfüggő modellek:**
  Időben változó folyamatok esetén a lokális gyorsulást beletehetjük Q-ba. Időben implicit sémát alkalmazva nagy időlépéseket lehet tenni.