



FORGÓSZÁRNYAS 06 REPÜLŐGÉPEK

Gausz Tamás
Budapest, 2014



Figyelem:

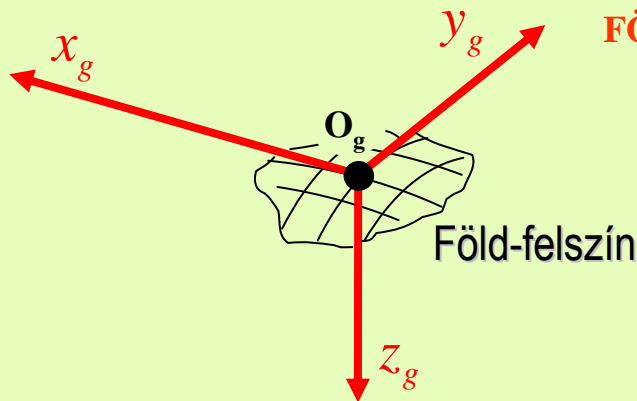
A következő képeken
közölt ismeretek az
előadásokon
elhangzottakkal együtt
képeznek
érthető és tanulható
egységet!





Koordináta rendszerek

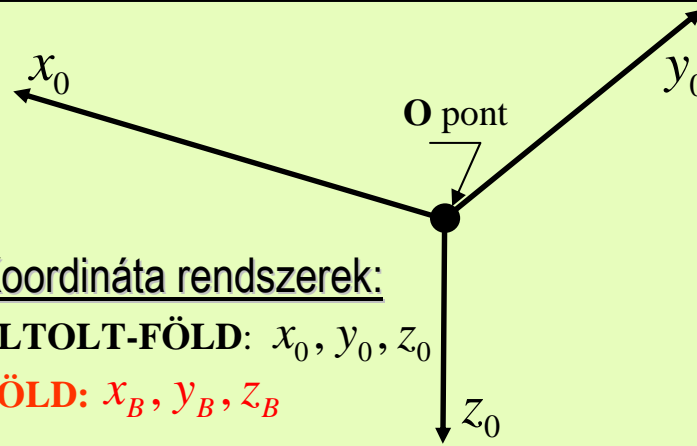
A „FÖLD” koordináta rendszer (nekünk) inercia rendszer:



Koordináta rendszerek:

ELTOLT-FÖLD: x_0, y_0, z_0

FÖLD: x_B, y_B, z_B



Az „ELTOLT-FÖLD” koordináta rendszer tengelyei párhuzamosak a „FÖLD” kr. tengelyekkel, az „O” azonos lesz a „HR” (helikopterhez rögzített) ponttal:

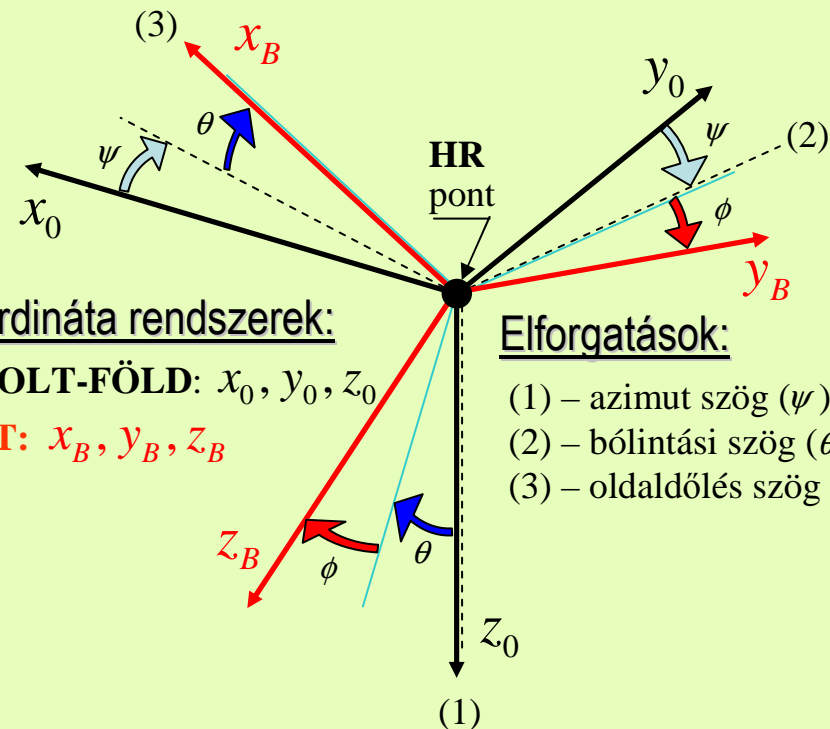


(Földhöz rögzített helikopter)

Koordináta rendszerek:

ELTOLT-FÖLD: x_0, y_0, z_0

TEST: x_B, y_B, z_B



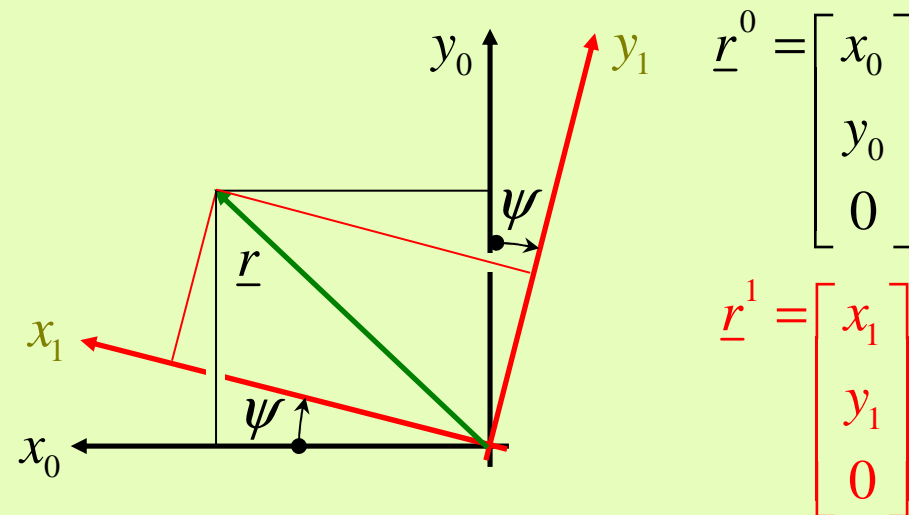
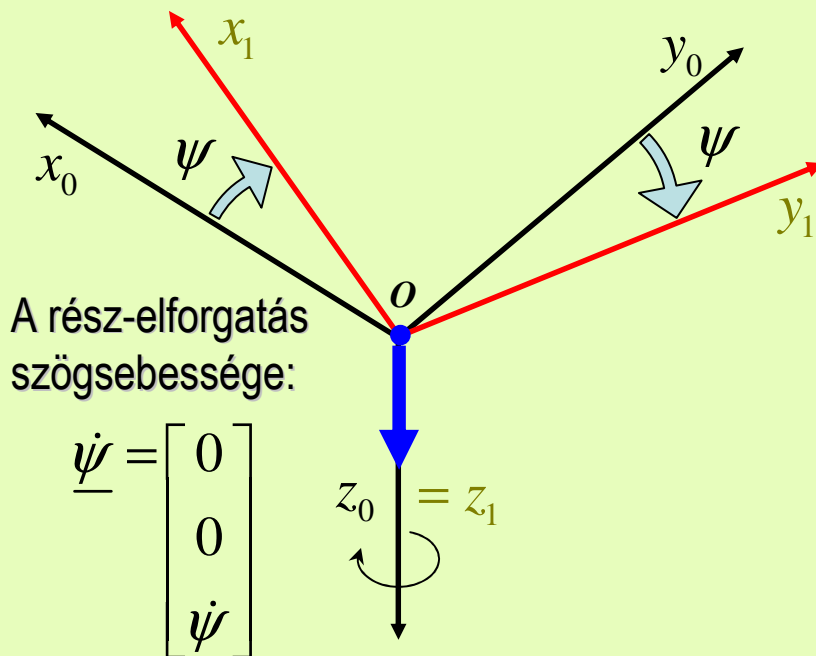
Elforgatások:

- (1) – azimut szög (ψ);
- (2) – bólintási szög (θ);
- (3) – oldaldőlés szög (ϕ).



Általános átáramlás – elforgatások – első rész elforgatás

ψ - azimút szöggel, a $z_0 = z_1$ tengely körül:



$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi + z_0 \cdot 0 \\ y_1 &= -x_0 \sin \psi + y_0 \cos \psi + z_0 \cdot 0 \\ z_1 &= x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 + z_0 \cdot 1 \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^1 = \underline{A}_{1,0} \underline{r}^0$$

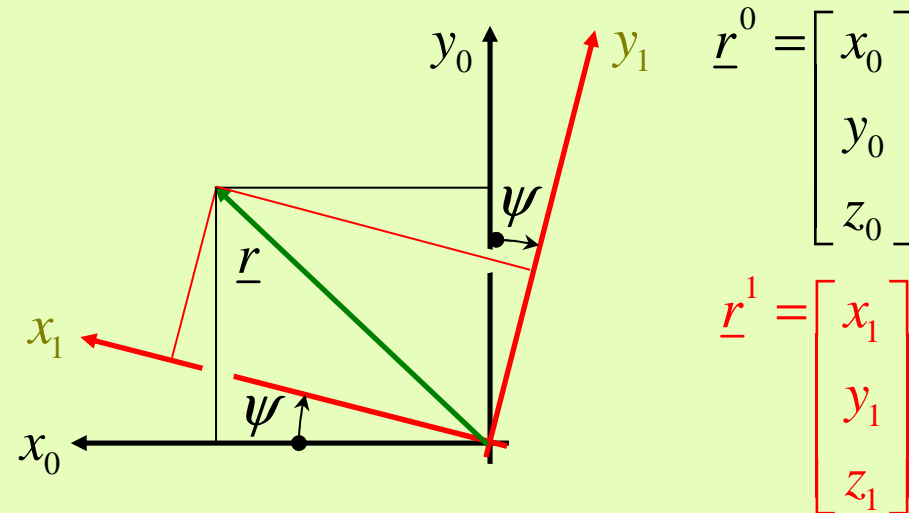
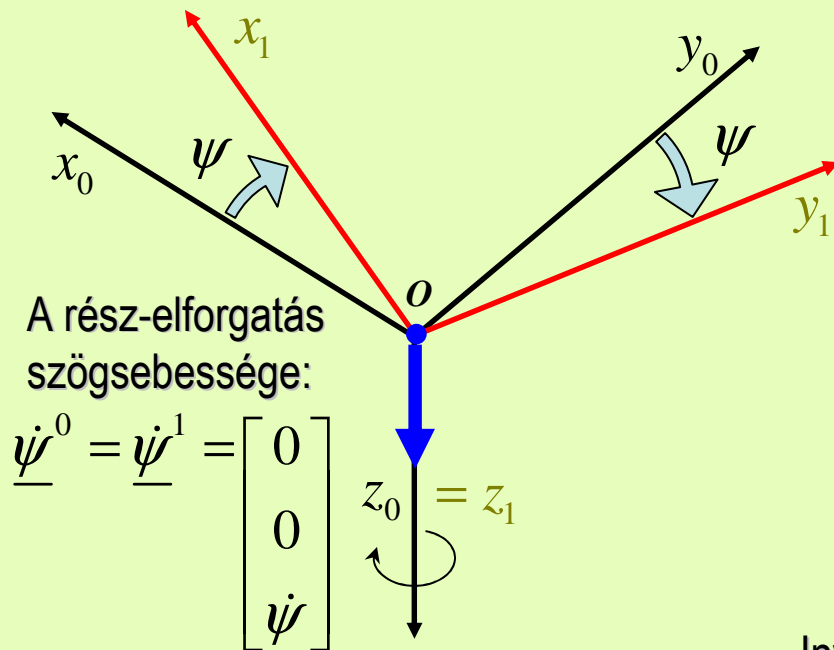
Forgatási mátrix – (valós elemű) unitér mátrix – ortogonális mátrix.

A forgatási mátrixok szorzata is forgatási mátrix!



Elforgatások – első rész elforgatás és inverz

ψ - azimút szöggel, a $z_0 = z_1$ tengely körül:



Inverz transzformáció:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \underline{r}^1 = \underline{A}_{1,0} \underline{r}^0 \\ \underline{r}^0 = \underline{A}_{1,0}^T \underline{r}^1 \end{matrix}$$

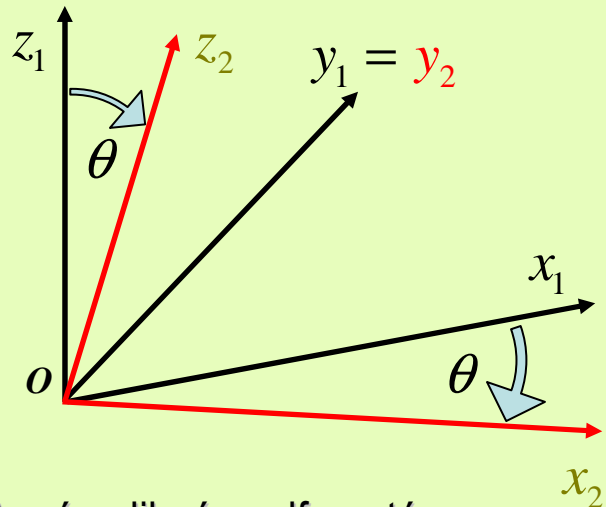
Forgatási mátrix – (valós elemű) unitér mátrix – ortogonális mátrix:

$$\underline{A}_{1,0}^{-1} = \underline{A}_{1,0}^T \quad (\det \underline{A} = 1, \text{adj} \underline{A} = \underline{A}^T) \quad \underline{A}_{1,0} \underline{A}_{1,0}^T = \underline{E} \quad \underline{A}_{1,0}^{-1} = \underline{A}_{1,0}(-\psi)$$



Elforgatások – második rész elforgatás és a szögsebességek

θ - hosszdlés szöggel, az $y_1 = y_2$ tengely körül:



$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^2 = \underline{A}_{2,1} \underline{r}^1 \quad \left(\underline{r}^1 = \underline{A}_{2,1}^T \underline{r}^2 \right)$$

$$\underline{r}^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

A második rész-elforgatás szögsebessége:

Az első rész-elforgatás szögsebessége:

$$\underline{\dot{\theta}}^1 = \underline{\dot{\theta}}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\psi}}^2 = \underline{A}_{2,1} \underline{\dot{\psi}}^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ 0 \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

$(\underline{\dot{\psi}}^1 = \underline{\dot{\psi}}^0)$

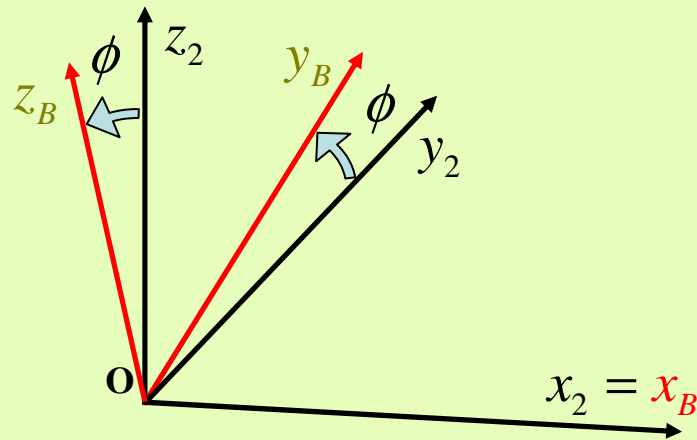
Az eredő szögsebesség: $\underline{\omega}^2 = \underline{\dot{\psi}}^2 + \underline{\dot{\theta}}^2 = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}$

Az eredő elforgatás:

$$\underline{r}^2 = \underline{A}_{2,1} \underline{r}^1 = \left(\underline{A}_{2,1} \underline{A}_{1,0} \right) \underline{r}^0$$



Elforgatások – harmadik rész elforgatás



ϕ - oldaldőlés szöggel, az $x_2 = x_B$ tengely körül

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^B = \underline{A}_{B,2} \underline{r}^2 \quad \left(\underline{r}^2 = \underline{A}_{B,2}^T \underline{r}^B \right)$$

A harmadik rész-elforgatás szögsebessége:

$$\underline{\dot{\phi}}^2 = \underline{\dot{\phi}}^B = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az eredő szögsebesség:

$$\underline{\omega}^B = \underline{\dot{\phi}}^B + \underline{A}_{B,2} \underline{\dot{\theta}}^2 + \underline{A}_{B,2} \underline{A}_{2,1} \underline{\dot{\psi}}^1 = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

Az eredő elforgatás:

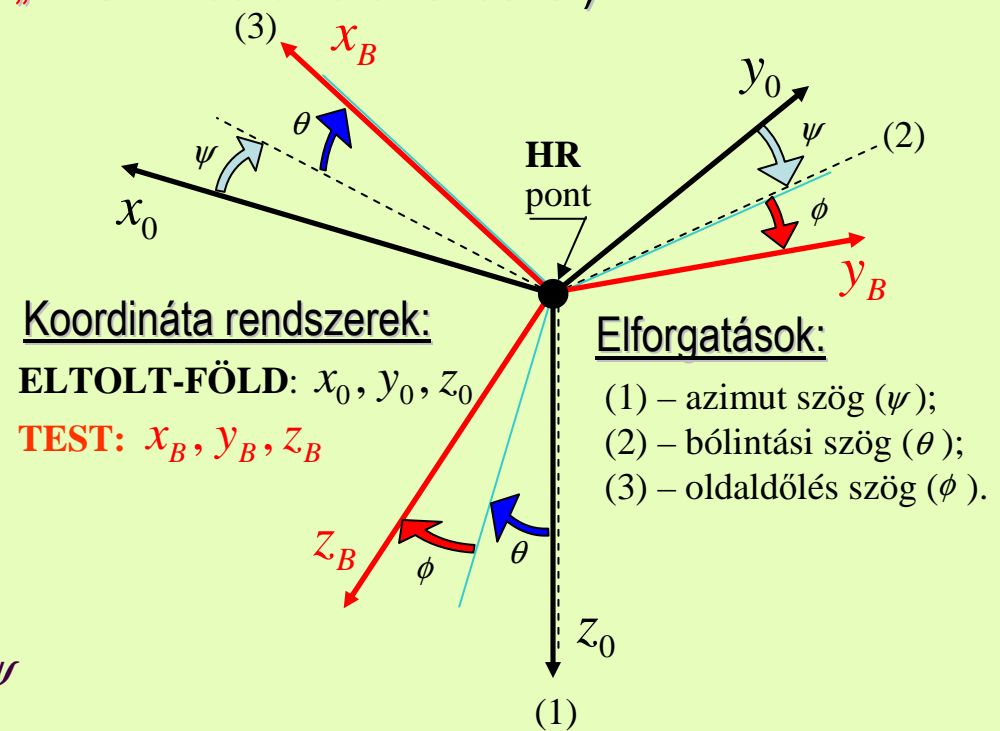
$$\underline{r}^B = \underline{A}_{B,2} \underline{r}^2 = \underline{A}_{B,2} \underline{A}_{2,1} \underline{r}^1 = \left(\underline{A}_{B,2} \underline{A}_{2,1} \underline{A}_{1,0} \right) \underline{r}^0 = \underline{A}_{B,0} \underline{r}^0$$

(A transzformációs mátrixok szorzata is transzformációs [ortogonális] mátrix, az inverz a transzponált!)

Eredő elforgatás („ELTOLT-FÖLD” és „TEST” koordináta rendszer)

$$A_{\equiv B,0} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$\sin \phi := s\phi, \cos \phi := c\phi,$
 $\sin \theta := s\theta, \cos \theta := c\theta$
 $\sin \psi := s\psi, \cos \psi := c\psi$



Az eredő elforgatás:

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← TEST ← ELTOLT-FÖLD

$$\underline{r}^B = A_{\equiv B,2} \underline{r}^2 = A_{\equiv B,2} A_{\equiv 2,1} \underline{r}^1 = (A_{\equiv B,2} A_{\equiv 2,1} A_{\equiv 1,0}) \underline{r}^0 = A_{\equiv B,0} \underline{r}^0$$

$$A_{\equiv B,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad A_{\equiv 2,1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad A_{\equiv 1,0} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Quaternion

W. R. Hamilton (1843): $\underline{i}^2 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2 = \underline{i}\underline{j}\underline{k} = -1$

$$q = q_0 + \underline{q} = q_0 + \underline{i}q_1 + \underline{j}q_2 + \underline{k}q_3$$

a konjugáltja:

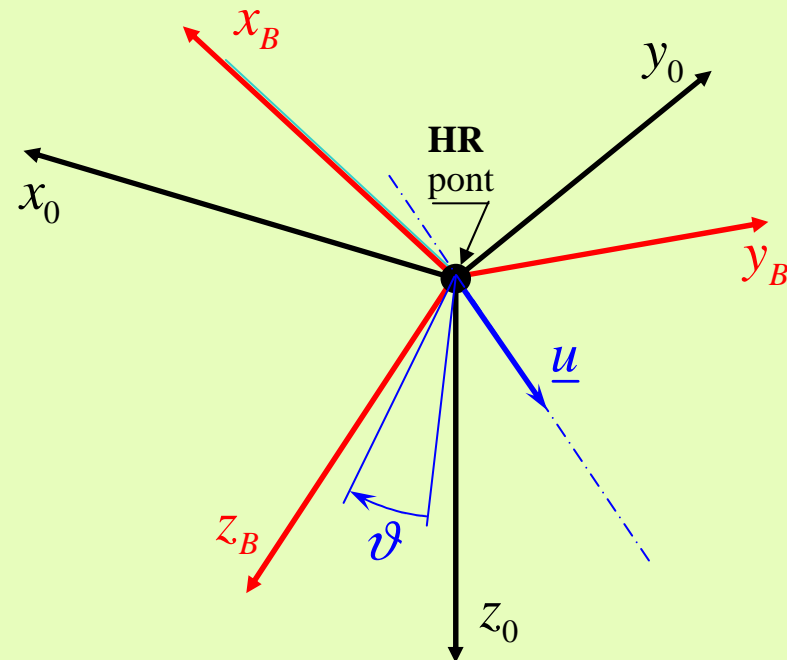
$$q^* = q_0 - \underline{q} = q_0 - \underline{i}q_1 - \underline{j}q_2 - \underline{k}q_3$$

illetve (legyen \underline{u} a forgástengelyt kijelölő
egységvektor és ϑ az elforgatás szöge:

akkor a $q = \cos \frac{\vartheta}{2} + \underline{u} \sin \frac{\vartheta}{2}$ quaternionnal

definiált $L_{q^*}(\underline{v}) = q^* \underline{v} q$ leképezés a

a koordináta rendszer elforgatását jelenti. Átjárás a hagyományos transzformációk felé $\rightarrow \underline{r}^B = \underline{A}_{B,0} \underline{r}^0$



TEST ← ELTOLT-FÖLD

Alkalmazások: modern repülésmechanika (pl. mérési hibával terhelt pályaadatok legjobb feldolgozása);
robottechnika;
kvantummechanika, modern relativitáselmélet;
jelfeldolgozás (QFT – quaternion-Fourier-transzformáció)
hang- és képezonosítás (QWT – quaternion-Wavelet-transzformáció)



Koordináta rendszerek („AÉRODINAMIKAI” v. „SZÉL” és „TEST” rendszer)

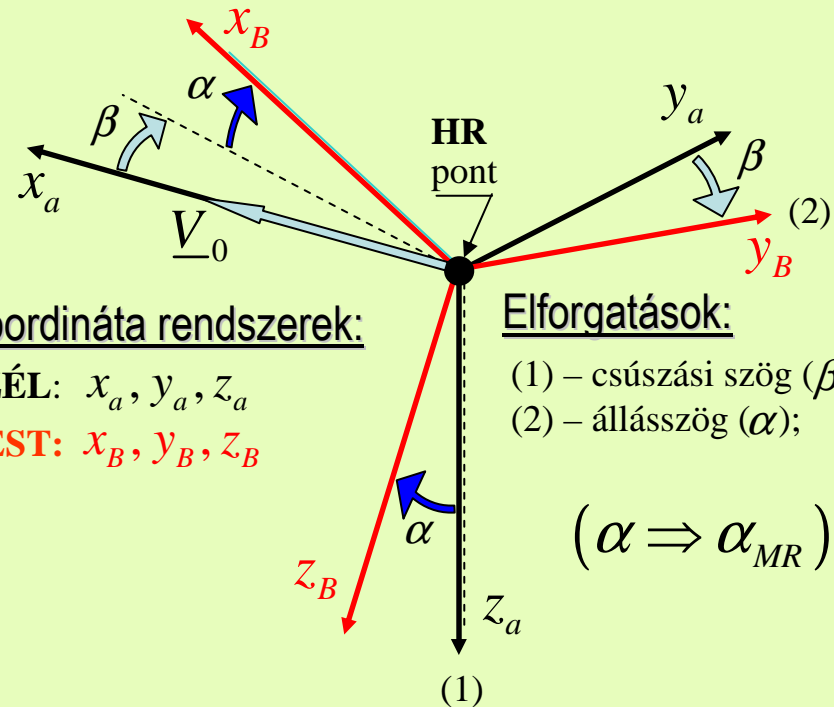
A repülési sebesség a **TEST** kr.-ben:

$$\underline{V}_0^B = \underline{A}_{B,a} \underline{V}_0^a$$

Általános esetben:

$$\underline{V}_0^B = \begin{bmatrix} c\alpha_{MR} c\beta & c\alpha_{MR} s\beta & -s\alpha_{MR} \\ -s\beta & c\beta & 0 \\ s\alpha_{MR} c\beta & s\alpha_{MR} s\beta & c\alpha_{MR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}_0^B = \begin{bmatrix} V_0 c\alpha_{MR} c\beta \\ -V_0 s\beta \\ V_0 s\alpha_{MR} c\beta \end{bmatrix}$$



LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← **TEST** ← AÉRODINAMIKAI

Szorítkozzunk csúszásmentes repülésre:

$$\underline{V}_0^B = \begin{bmatrix} c\alpha_{MR} & 0 & -s\alpha_{MR} \\ 0 & 1 & 0 \\ s\alpha_{MR} & 0 & c\alpha_{MR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 c\alpha_{MR} \\ 0 \\ V_0 s\alpha_{MR} \end{bmatrix}$$

Általánosan:

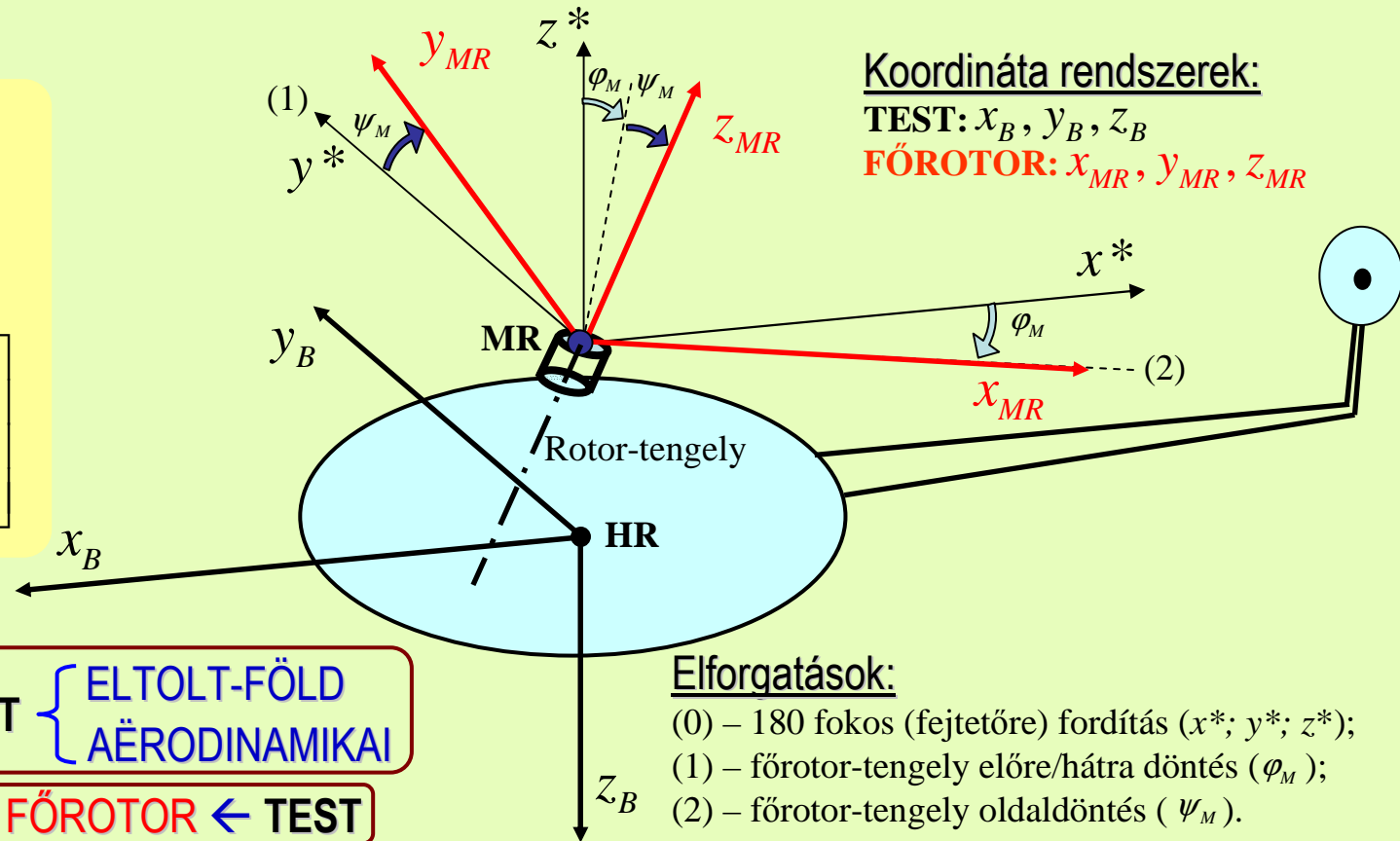
$$\underline{A}_{B,a} = \begin{bmatrix} c\alpha_{MR} c\beta & c\alpha_{MR} s\beta & -s\alpha_{MR} \\ -s\beta & c\beta & 0 \\ s\alpha_{MR} c\beta & s\alpha_{MR} s\beta & c\alpha_{MR} \end{bmatrix}$$

Koordináta rendszerek („TEST” és „FŐROTOR” rendszer, általában)

$$\underline{r}^{MR} = \underline{A}_{MR,B} \underline{r}^B$$

A legegyszerűbb esetben:

$$\underline{A}_{MR,B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Koordináta rendszerek:

TEST: x_B, y_B, z_B

FŐROTOR: x_{MR}, y_{MR}, z_{MR}

← TEST { ELTOLT-FÖLD
AÉRODINAMIKAI

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← TEST

Elforgatások:

(0) – 180 fokos (fejtetőre) fordítás ($x^*; y^*; z^*$);

(1) – főrotor-tengely előre/hátra döntés (φ_M);

(2) – főrotor-tengely oldaldöntés (ψ_M).

Általánosan:

$$\underline{A}_{MR,B} = \begin{bmatrix} -c\varphi_M & 0 & s\varphi_M \\ -s\psi_M s\varphi_M & c\psi_M & -s\psi_M c\varphi_M \\ -c\psi_M s\varphi_M & -s\psi_M & -c\psi_M c\varphi_M \end{bmatrix}$$



Koordináta rendszerek („TEST” és „FŐROTOR” rendszer)

A repülési sebesség a **TEST** kr.-ben:

$$\underline{V}_0^B = \begin{bmatrix} V_0 c \alpha_{MR} & 0 & V_0 s \alpha_{MR} \end{bmatrix}$$

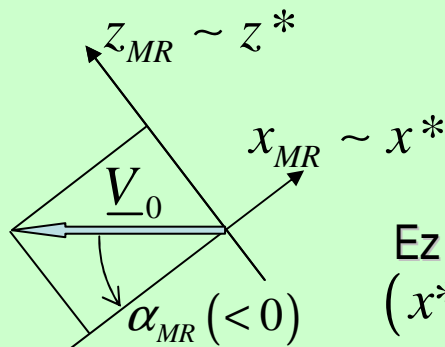
Transzformáljunk a „FŐROTOR” rendszerbe:

$$\underline{V}_0^{MR} = \underline{A}_{MR,B} \underline{V}_0^B$$

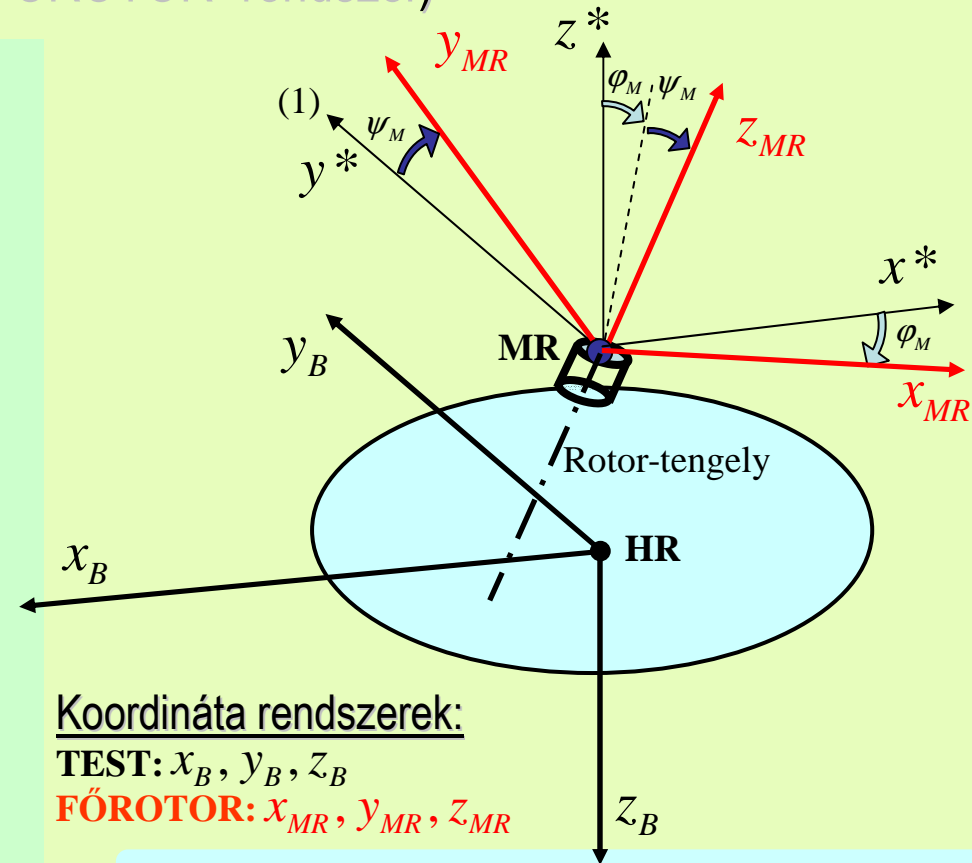
A legegyszerűbb esetben:

$$\underline{V}_0^{MR} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 c \alpha_{MR} \\ 0 \\ V_0 s \alpha_{MR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_0 c \alpha_{MR} \\ 0 \\ -V_0 s \alpha_{MR} \end{bmatrix}$$

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← TEST



Ez tulajdonképpen az (x^*, y^*, z^*) rendszer



Általánosan:

$$\underline{A}_{MR,B} = \begin{bmatrix} -c \varphi_M & 0 & s \varphi_M \\ -s \psi_M s \varphi_M & c \psi_M & -s \psi_M c \varphi_M \\ -c \psi_M s \varphi_M & -s \psi_M & -c \psi_M c \varphi_M \end{bmatrix}$$



Koordináta rendszerek („FŐROTOR” és „FORGÓ” rendszer)

A repülési sebesség a **FORGÓ** kr.-ben:

$$\underline{V}_0^F = \underline{A}_{F,MR} \underline{V}_0^{MR} = \underline{A}_{F,MR} \underline{A}_{MR,B} \underline{V}_0^B$$

$$= \underline{A}_{F,MR} \underline{A}_{MR,B} \underline{A}_{B,a} \underline{V}_0^a$$

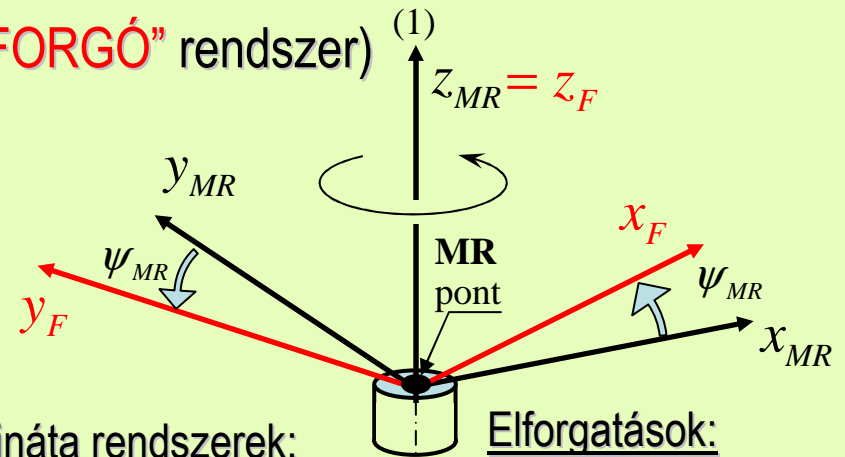
$$(\underline{V}_0^a)^T = [V_0 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{csúszásmentes repülés})$$

$$\underline{V}_0^B = \begin{bmatrix} c\alpha_{MR} & 0 & -s\alpha_{MR} \\ 0 & 1 & 0 \\ s\alpha_{MR} & 0 & c\alpha_{MR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 c\alpha_{MR} \\ 0 \\ V_0 s\alpha_{MR} \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}_0^{MR} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 c\alpha_{MR} \\ 0 \\ V_0 s\alpha_{MR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_0 c\alpha_{MR} \\ 0 \\ -V_0 s\alpha_{MR} \end{bmatrix}$$

A végeredmény a legegyszerűbb esetben:

$$\underline{V}_0^F = \begin{bmatrix} c\psi_{MR} & s\psi_{MR} & 0 \\ -s\psi_{MR} & c\psi_{MR} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_0 c\alpha_{MR} \\ 0 \\ -V_0 s\alpha_{MR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_0 c\alpha_{MR} c\psi_{MR} \\ V_0 c\alpha_{MR} s\psi_{MR} \\ -V_0 s\alpha_{MR} \end{bmatrix}$$



Koordináta rendszerek:

FŐROTOR: x_{MR}, y_{MR}, z_{MR}

FORGÓ: x_F, y_F, z_F

Elforgatások:

(1) – azimút szög (ψ_{MR});

Főrotor-tengely

Ahol:

$$\underline{A}_{F,MR} = \begin{bmatrix} c\psi_{MR} & s\psi_{MR} & 0 \\ -s\psi_{MR} & c\psi_{MR} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

← TEST { ELTOLT-FÖLD
AÉRODINAMIKAI

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← TEST



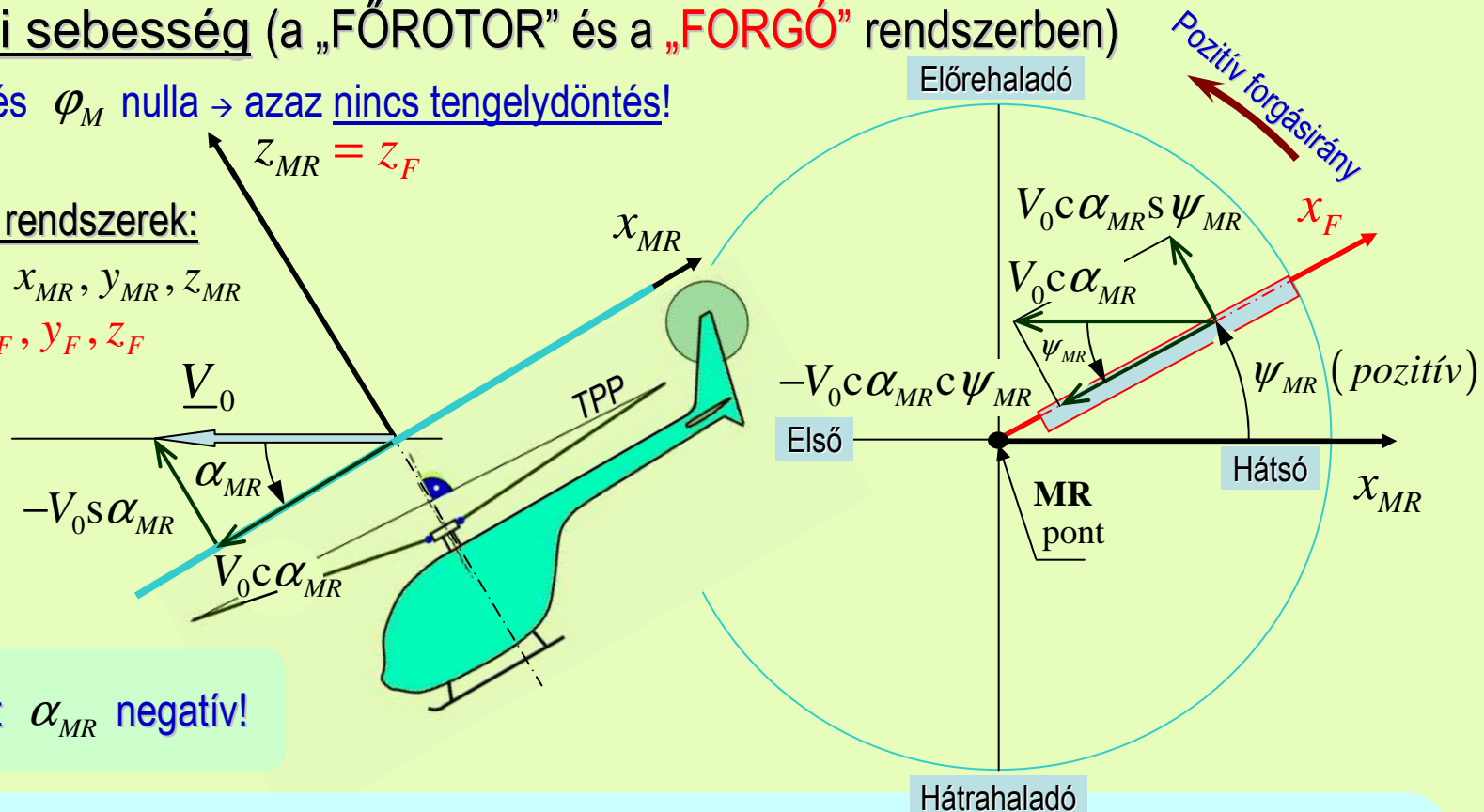
A repülési sebesség (a „FŐROTOR” és a „FORGÓ” rendszerben)

Legyen ψ_M és φ_M nulla \rightarrow azaz nincs tengelydöntés!

Koordináta rendszerek:

FŐROTOR: x_{MR}, y_{MR}, z_{MR}

FORGÓ: x_F, y_F, z_F



Az itt ábrázolt α_{MR} negatív!

$$\underline{V}_0^F = \begin{bmatrix} -V_0 c \alpha_{MR} c \psi_{MR} \\ V_0 c \alpha_{MR} s \psi_{MR} \\ -V_0 s \alpha_{MR} \end{bmatrix}$$

- ~ nagyjából a rotorlapát hossz tengely irányába mutató sebesség-összetevő
- ~ nagyjából a rotorlapátra merőleges sebesség-összetevő
- ~ rotor-forgástengely irányú sebesség-összetevő

← TEST { ELTOLT-FÖLD
AÉRODINAMIKAI

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← TEST



Koordináta rendszerek („FORGÓ” és „LAPÁT” rendszer)

Például:

$$\underline{V}_0^L = \underline{A}_{L,F} \underline{A}_{F,MR} \underline{A}_{MR,B} \underline{A}_{B,a} \underline{V}_0^a$$

Például:

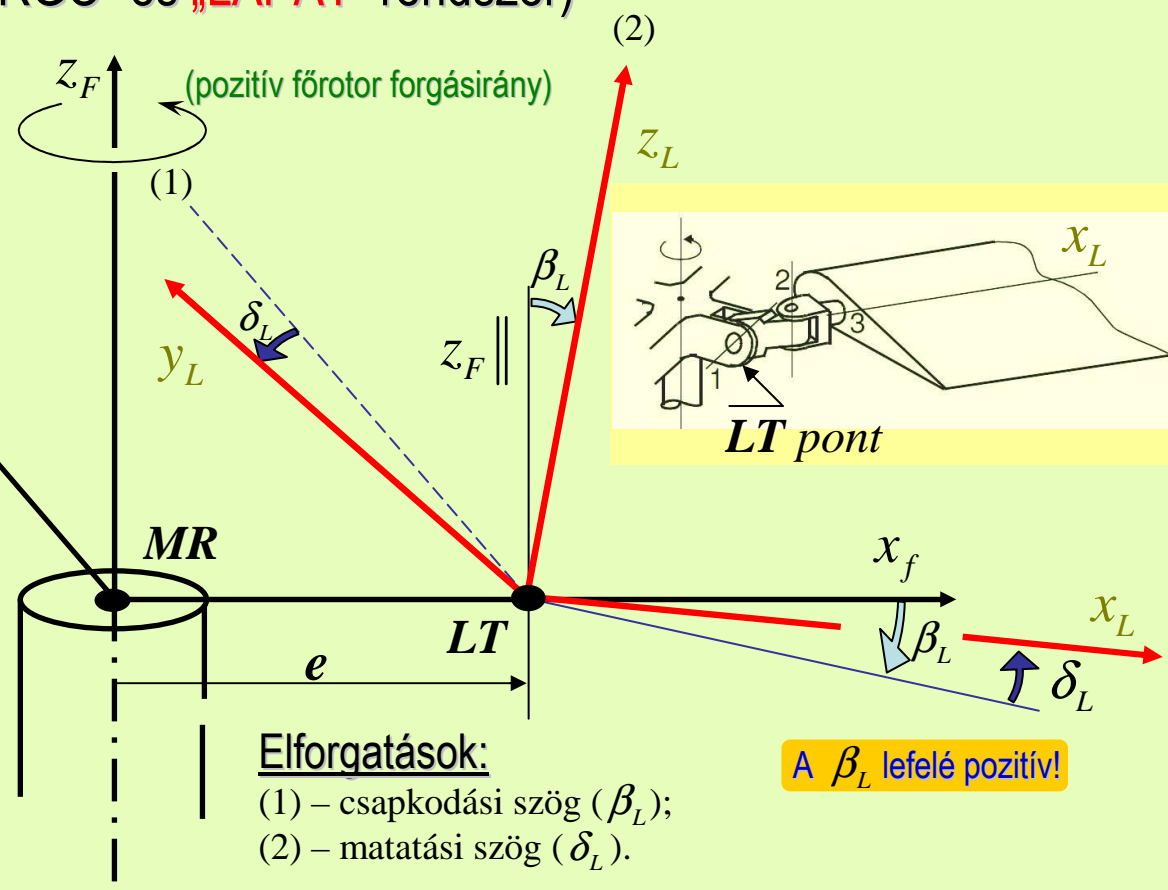
$$\underline{V}_0^L = \begin{bmatrix} -V_0 c \alpha_{MR} c \psi_{MR} c \beta_L + V_0 s \alpha_{MR} s \beta_L \\ V_0 c \alpha_{MR} s \psi_{MR} \\ -V_0 c \alpha_{MR} c \psi_{MR} s \beta_L - V_0 s \alpha_{MR} c \beta_L \end{bmatrix}$$

Koordináta rendszerek:

FORGÓ: x_F, y_F, z_F

LAPÁT: x_L, y_L, z_L

$$\underline{A}_{L,F} = \begin{bmatrix} c \delta_L c \beta_L & s \delta_L & -c \delta_L s \beta_L \\ -s \delta_L c \beta_L & c \delta_L & s \delta_L s \beta_L \\ s \beta_L & 0 & c \beta_L \end{bmatrix} \xrightarrow[\delta_L \approx 0]{ha} \begin{bmatrix} c \beta_L & 0 & -s \beta_L \\ 0 & 1 & 0 \\ s \beta_L & 0 & c \beta_L \end{bmatrix}$$



A β_L lefelé pozitív!

Elforgatások:

- (1) – csapkodási szög (β_L);
- (2) – matatási szög (δ_L).

← TEST { ELTOLT-FÖLD
AÉRODINAMIKAI

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← TEST



Transzformációk – összefoglaló

A repülési sebességből származó sebességek például:

$$\underline{V}_{-0}^L = \underline{A}_{L,F} \underline{A}_{F,MR} \underline{A}_{MR,B} \underline{A}_{B,a} \underline{V}_{-0}^a$$

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← **TEST** ← AÉRODINAMIKAI

$$\underline{V}_{-0}^L = \begin{bmatrix} -V_0 c \alpha_{MR} c \psi_{MR} c \beta_L + V_0 s \alpha_{MR} s \beta_L \\ V_0 c \alpha_{MR} s \psi_{MR} \\ -V_0 c \alpha_{MR} c \psi_{MR} s \beta_L - V_0 s \alpha_{MR} c \beta_L \end{bmatrix}$$

Rendszerint ezzel az összetevővel számolunk → (de akár 10~20% hibát is elkövethetünk)

$$-V_0 s \alpha_{MR}$$

Csúszásmentes repülés, illetve nem bedöntött főtengely esetén!

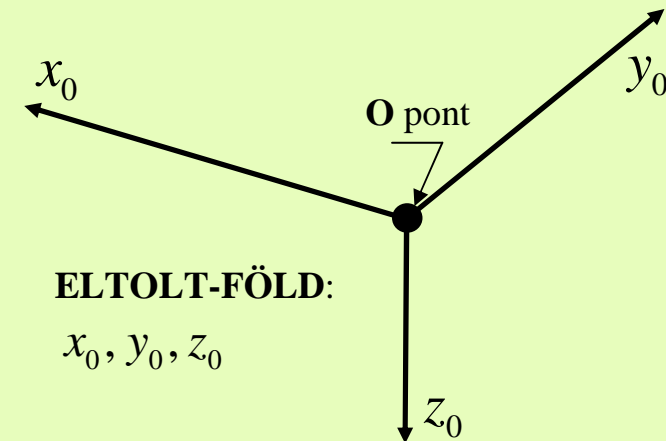
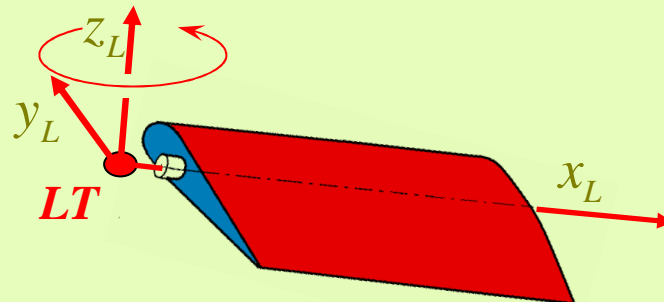
$$\begin{aligned} & -V_0 c \alpha_{MR} c \psi_{MR} s \beta_L - V_0 s \alpha_{MR} c \beta_L \\ & -V_0 s \alpha_{MR} c \beta_L \end{aligned}$$

z_L

A rotorlapát súlyereje például:

$$\underline{W}_{RotorLapát}^L = \underline{A}_{L,F} \underline{A}_{F,MR} \underline{A}_{MR,B} \underline{A}_{B,0} \underline{W}_{RotorLapát}^0$$

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← **TEST** ← ELTOLT-FÖLD



ELTOLT-FÖLD:

x_0, y_0, z_0

← **TEST** { ELTOLT-FÖLD
AÉRODINAMIKAI

LAPÁT ← FORGÓ ← FŐROTOR ← **TEST**



Köszönöm a figyelmet!