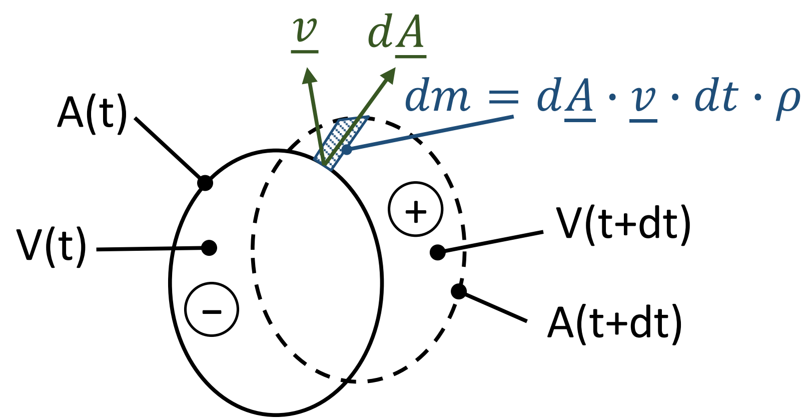
Energiaegyenlet

Áramló gáz egy gondolatban elhatárolt, V térfogatú elúszó része:

Van:
- belső energiája,
- mozgási energiája,
- helyzeti energiája.



Az energiáját megváltoztathatja:
- az erőtér által végzett munka,
- a felületi erők munkája, ezen belül
    - a nyomásból és
    - a súrlódásból származó erők munkája,
- hőközlés.

Legyen az áramlás stacioner, a térerőt elhanyagoljuk.

A gáz energiájának változása és a felületi munkavégzés és hőátvitel között:

$$\frac{d}{dt}\int_V^{\cdot}\left(\frac{v^2}{2}+c_v T\right)\rho dV = -\int_A^{\cdot}\underline{v}pd\underline{A} + \int_A^{\cdot}\underline{v}\tau\underline{e}\left|d\underline{A}\right| + \int_A^{\cdot}\lambda\,\underline{gradT}\,d\underline{A}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{v^2}{2}+c_v T\right)\rho dV = -\int_A \underline{v} p d\underline{A} + \cancel{\int_A \underline{v}\tau\underline{e}\left|d\underline{A}\right|} + \cancel{\int_A \lambda\, \underline{gradT}\, d\underline{A}}$$

V térfogatban levő gáztömeg mozgási és belső energiájának egységnyi idő alatti változása
c_v : állandó térfogaton vett fajhő

Nyomásból származó erő teljesítménye

Csúsztatófeszült-ségből származó nyíróerő teljesítménye

Környezetből hővezetéssel átadódó hőmennyiség
λ : hővezetési tényező

Ha súrlódásmentes és hőszigetelt:

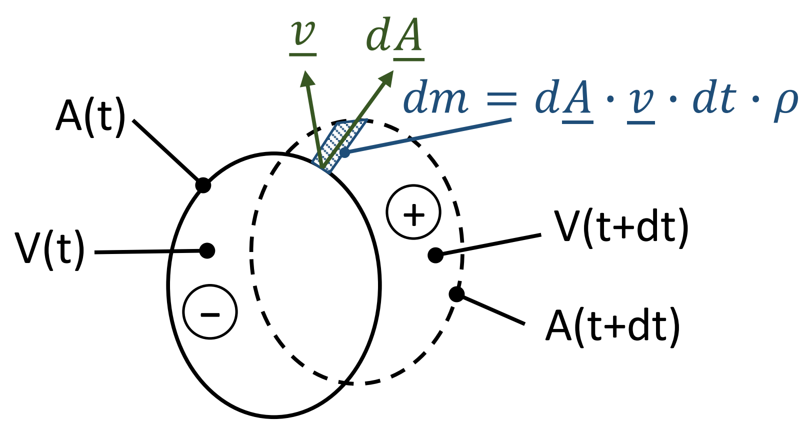
$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{v^2}{2}+c_v T\right)\rho dV = -\int_A \underline{v} p d\underline{A}$$

Emlékeztető: Impulzustétel levezetésénél volt:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\underline{v} dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\underline{v} dV + \int_A \underline{v}\,\rho\underline{v}\, d\underline{A}$$

Mivel az áramlás itt stacioner:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\underline{v} dV = \int_A \underline{v}\,\rho\underline{v}\, d\underline{A}$$



Mivel az áramlás itt stacioner: $\frac{d}{dt}\int_V^{\cdot} \rho \underline{v} dV = \int_A^{\cdot} \underline{v}\, \rho \underline{v}\, d\underline{A}$

Ennek mintájára:

$$\frac{d}{dt}\int_V^{\cdot}\left(\frac{v^2}{2}+c_vT\right)\rho dV = \int_A^{\cdot}\left(\frac{v^2}{2}+c_vT\right)\rho\underline{v}d\underline{A} = -\int_A^{\cdot}\underline{v}pd\underline{A} \qquad \Big/ \cdot\frac{\rho}{\rho}$$

$$\int_A^{\cdot}\left(\frac{v^2}{2}+c_vT\right)\rho\underline{v}d\underline{A} = -\int_A^{\cdot}\frac{p}{\rho}\rho\underline{v}d\underline{A} \longrightarrow \int_A^{\cdot}\left(\frac{v^2}{2}+c_vT+\frac{p}{\rho}\right)\rho\underline{v}d\underline{A} = 0$$

$$\frac{p}{\rho} = R\cdot T = (c_p - c_v)T \longrightarrow c_vT + \frac{p}{\rho} = \cancel{c_vT} + c_pT - \cancel{c_vT} = c_pT = h \ \text{(entalpia)}$$

A fentiek alapján: $\int_A^{\cdot}\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)\rho\underline{v}d\underline{A} = 0$

Gauss-Osztrogradszkij alapján:

$$\int_A^{\cdot}\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)\rho\underline{v}d\underline{A} = \int_V^{\cdot} div\left(\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)\rho\,\underline{v}\right)dV$$

Emlékeztetőül (szorzat deriválási szabályok miatt): $div(\rho \underline{v}) = \underline{v}\, \underline{grad}\rho + \rho\, div\underline{v}$

$$\int_V div\left(\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right)\rho\, \underline{v}\right) dV = \int_V \left(\rho \underline{v}\, \underline{grad}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) + \cancel{\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) div(\rho \underline{v})}\right) dV$$

Kontinuitás: $div(\rho \underline{v}) = -\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0$ mert az áramlás stacioner.

Vagyis: $\displaystyle\int_V \rho \underline{v}\, \underline{grad}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) dV = 0$

Ez akkor 0, ha az integrálon belüli kifejezés 0: $\rho \underline{v}\, \underline{grad}\left(\dfrac{v^2}{2} + c_p T\right) = 0$

Ez pedig akkor 0, ha

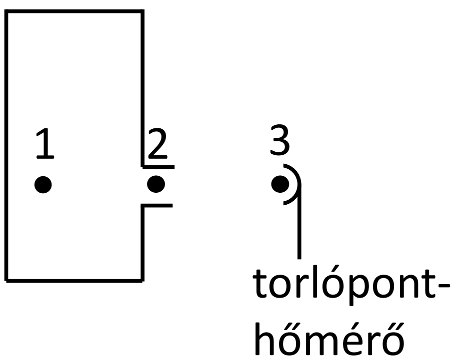
- $\rho = 0$ (???)
- $\underline{v} = 0 \rightarrow$ hidrosztatika
- $\underline{grad}\left(\dfrac{v^2}{2} + c_p T\right) = 0 \rightarrow \dfrac{v^2}{2} + c_p T = áll.$
- $\underline{grad}\left(\dfrac{v^2}{2} + c_p T\right) \perp \underline{v} \rightarrow \dfrac{v^2}{2} + c_p T = áll.$ áramvonal mentén.

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = áll. \Big/ /c_p \longrightarrow \underbrace{\boxed{\frac{v^2}{2c_p}}}_{T_{din}} + \underbrace{\boxed{T}}_{T_{stat}} = áll.$$

Energiaegyenlet:
Mozgási energia+entalpia = áll.
Összhőmérséklet = áll.

(súrlódásmentes, hőszigetelt, stacioner áramlás, térerő elhanyagolása mellett)

"Példa":



$$1-3:\quad \frac{v_1^2}{2c_p}+T_1=\frac{v_3^2}{2c_p}+T_3 \qquad v_3=v_1=0 \rightarrow T_1=T_3$$

$$1-2:\quad \underbrace{\boxed{\frac{v_1^2}{2c_p}}}_{=0}+T_1=\frac{v_2^2}{2c_p}+T_2 \rightarrow T_2=T_1-\frac{v_2^2}{2c_p}$$

$$\rightarrow v_2=\sqrt{(T_1-T_2)2c_p}$$

Bernoulli-egyenlet összenyomható gázokra

Kiindulás: általános eset, csak súrlódásmentesség feltételezése.

$$\cancel{\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s}} + \int_1^2 \underline{grad}\frac{v^2}{2} d\underline{s} - \cancel{\int_1^2 \underline{v} \times \underline{rot}\, \underline{v}\, d\underline{s}} = \cancel{\int_1^2 \underline{g} d\underline{s}} - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \underline{grad} p\, d\underline{s}$$

További egyszerűsítés: hőszigetelt → izentróp.

Ekkor $\frac{p}{\rho^\kappa} = áll.$ ahol $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ tehát a sűrűség csak a nyomás függvénye.

Ezért: $\frac{1}{\rho}\underline{grad}p = \underline{grad}\left(\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\right)$

További egyszerűsítés: stacioner, áramvonalon integrálunk, térerőt elhanyagoljuk.

Valamint: $\int_1^2 \underline{grad}\frac{v^2}{2} d\underline{s} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$ és $\int_1^2 \underline{grad}\left(\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\right) d\underline{s} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$

Eredmény:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

Mivel $\dfrac{p}{\rho^{\kappa}} = áll. = \dfrac{p_1}{\rho_1^{\kappa}} \rightarrow \rho = \dfrac{p^{\frac{1}{\kappa}}}{p_1^{\frac{1}{\kappa}}} \rho_1 \rightarrow \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1} \dfrac{1}{p^{\frac{1}{\kappa}}}$ ezért

$$-\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1} \frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}} \rightarrow \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p^{\frac{1}{\kappa}}} dp = \int_{p_1}^{p_2} p^{-\frac{1}{\kappa}} dp = \left[\frac{p^{-\frac{1}{\kappa}+1}}{-\frac{1}{\kappa}+1}\right]_1^2$$

Mivel $1 - \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{\kappa}{\kappa} - \dfrac{1}{\kappa} = \boxed{\dfrac{\kappa - 1}{\kappa}}$ ezért

$$\left[\frac{p^{-\frac{1}{\kappa}+1}}{-\frac{1}{\kappa}+1}\right]_1^2 = \left[\frac{\kappa}{\kappa - 1} p^{1-\frac{1}{\kappa}}\right]_1^2 \quad \text{és} \quad \left[p^{1-\frac{1}{\kappa}}\right]_1^2 = p_2^{1-\frac{1}{\kappa}} - p_1^{1-\frac{1}{\kappa}} = p_1^{1-\frac{1}{\kappa}}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}} - 1\right)$$

Innen:

$$-\int_{p_1}^{p_2} \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1} \frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\overbrace{p_1^{\frac{1}{\kappa}} p_1^{1-\frac{1}{\kappa}}}^{= p_1}}{\rho_1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}\right) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

ezért váltott előjelet

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\,\frac{p_1}{\rho_1}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)=\frac{v_2^2-v_1^2}{2}$$ mivel $$\frac{p_1}{\rho_1}=RT_1$$ ezért

$$v_2=\sqrt{v_1^2+\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,RT_1\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$

Tartály esetében: $v_1 = v_{tartály} = 0$ ezért

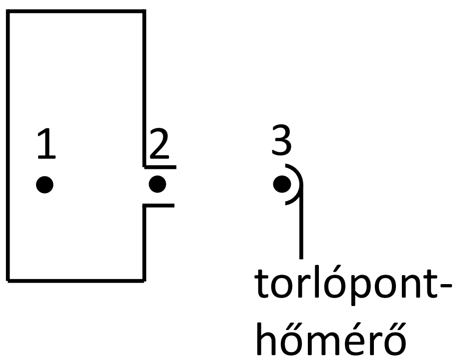
$$v_{ki}=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,RT_t\left(1-\left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$

Mivel

$$\frac{p}{\rho^\kappa}=áll.\rightarrow\frac{p_1}{\rho_1^\kappa}=\frac{p_2}{\rho_2^\kappa}\;\rightarrow\frac{p_2}{p_1}=\frac{\rho_2^\kappa}{\rho_1^\kappa}=\frac{p_2^\kappa}{\cancel{R^\kappa}T_2^\kappa}\,\frac{\cancel{R^\kappa}T_1^\kappa}{p_1^\kappa}=\frac{p_2^\kappa}{T_2^\kappa}\,\frac{T_1^\kappa}{p_1^\kappa}=\frac{p_2}{p_1}\;\rightarrow\frac{p_2^{1-\kappa}}{p_1^{1-\kappa}}=\frac{T_1^\kappa}{T_2^\kappa}=\frac{p_1^{\kappa-1}}{p_2^{\kappa-1}}$$

Vagyis: $$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$ ezért $$v_{ki}=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\,RT_t\left(1-\frac{T_{ki}}{T_t}\right)}$$

Példa:



A tartályban levegő van ($R = 287 \frac{J}{kgK}$, $\kappa = 1.4$),
hőmérséklete $T_t = 20°\mathrm{C}$,
nyomása $p_t = 1.8$ bar.
A külső nyomás $p_0 = 1$ bar.
A tartály falán levő nyílás átmérője $d = 4$ mm.

Mennyi a másodpercenként kiáramló közeg?

$$q_m = \rho_{ki} v_{ki} A$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 1.257 \cdot 10^{-5}\ m^2 \qquad \rho_t = \frac{p_t}{RT_t} = 2.14\ \frac{kg}{m^3}$$

$$v_{ki} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}\ RT_t \left(1 - \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} = 301.7\ \frac{m}{s} \qquad c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} = 1004.5\ \frac{J}{kgK}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \rightarrow \rho_{ki} = \rho_t \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1.4 \frac{kg}{m^3} \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_{ki} = T_t \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 248K$$

$$q_m = \rho_{ki} v_{ki} A = 0.0053\ \frac{kg}{s} \qquad v_{ki} = \sqrt{(T_t - T_{ki}) 2 c_p} = 301.7\ \frac{m}{s}$$