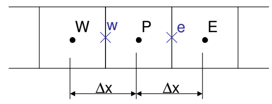
# Diszkretizáció véges térfogatok módszerével

Kristóf Gergely

2008.11.13.

# Diszkretizálás

$$\oint_A \rho u T \cdot dA_x = \oint_A \frac{\lambda}{c_v}\frac{\partial T}{\partial x}\cdot dA_x$$




Felírjuk a fluxusok felöleti integráljait: $(\rho u T)_e \cancel{A} - (\rho u T)_w \cancel{A} = \left(\frac{\lambda}{c_v}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e \cancel{A} - \left(\frac{\lambda}{c_v}\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w \cancel{A}$

Új jelölések: $C_e = C_w = \rho u \qquad D_e = D_w = \frac{\lambda}{c_v\, \Delta x}$

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e(T_E - T_P) - D_w(T_P - T_W)$$

Ugyanez még egyszerűbben: $F_e - F_w = 0$ ,

ahol: $F_e = C_e T_e - D_e(T_E - T_P)$ a teljes fluxus.

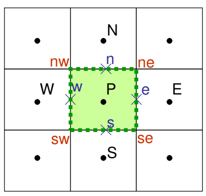
# Fluxusok és térfogati források numerikus integrálása

$$\oint_A \rho\phi\underline{v}\cdot d\underline{A} = \oint_A \Gamma\nabla\phi\cdot d\underline{A} + \int_V q_\phi dV$$

konvektív fluxus  konduktív fluxus  térfogati forrás

$F_e = \int_A \underline{f}\cdot d\underline{A} = \langle f_\perp\rangle_e A_e \cong f_{e\perp}A_e$  másodrendű pontosság

Compass indexelés:




$F_e \cong A_e \frac{1}{2}(f_{ne} + f_{se})_\perp$  másodrendű (trapéz módszer)

$F_e \cong \frac{A_e}{6}(f_{ne} + 4f_e + f_{se})_\perp$  negyedrendű (Simpson formula)

$Q_P \cong \int_V q_\phi dV \cong q_{\phi,P} V_P$  másodrendű

A fluxusok interpolációját legalább olyan pontosan kell végezni, mint a felületi integrálást.

# CDS séma

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e(T_E - T_P) - D_w(T_P - T_W)$$

A face-hőmérsékleteket **lineárisan interpoláljuk**:

$$\left[\frac{C_e}{2}(T_P + T_E) - D_e(T_E - T_P)\right] - \left[\frac{C_w}{2}(T_W + T_P) - D_w(T_P - T_W)\right] = 0$$

Felírjuk a P cellára vonatkozó lineáris egyenletet:

$$A_P T_P = A_W T_W + A_E T_E$$

| $A_W$ | $A_E$ | $A_P$ |
|---|---|---|
| $D_w + C_w/2$ | $D_e - C_e/2$ | $A_W + A_E$ |

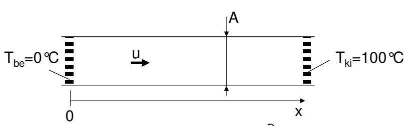
$$D_e + D_w + C_e/2 - C_w/2 = A_E + A_w + \underbrace{C_e - C_w}_{=0}$$

=0 kontinuitás

Mivel $A_P$=$A_W$+$A_E$, , az $A_P$ –re vonatkozó lineáris egyenlet a szomszédos cellák Hőmérséklete súlyozott átlgoklásának is tekinthető. Ha az együtthatók pozitívak, akkor az átlagolás nem vezethet be extrémumot P pontban.

# 1D példa

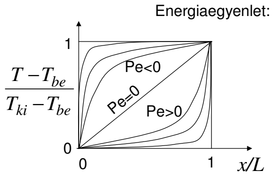
Stacionárius áramlás egyenes csőben, hővezetési feladat:




$$\underline{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Kontinuitás: $\frac{\partial\, \rho u}{\partial x} = 0 \longrightarrow$ u = állandó

Energiaegyenlet: $\oint_A [\, c_v T + \frac{v^2}{2}\,]\, \rho\underline{v}\cdot d\underline{A} = \oint_A \lambda\nabla T\cdot d\underline{A}$




Az analitikus megoldás:

$$\frac{T - T_{be}}{T_{ki} - T_{be}} = \frac{e^{\rho u x c_v/\lambda} - 1}{e^{\rho u L c_v/\lambda} - 1}$$

Pe (Peclet-szám)

# Az algebrai egyenletrendszer megoldása

Pl. 4 cella esetén az alábbi:

$$\begin{array}{c} \text{c} \\ \text{b} \\ \text{a} \end{array} \begin{bmatrix} A_{1,P} & A_{1,E} & 0 & 0 \\ A_{2,W} & A_{2,P} & A_{2,E} & 0 \\ 0 & A_{3,W} & A_{3,P} & A_{3,E} \\ 0 & 0 & A_{4,W} & A_{4,P} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1,P} \\ T_{2,P} \\ T_{3,P} \\ T_{4,P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{1,W}T_{be} \\ 0 \\ 0 \\ -A_{4,E}T_{ki} \end{bmatrix}$$

Megoldás: Gauss-eliminációval.
n ismeretlenes, tridiagonál mátrixú egyenletrendszer esetében csak 2 n művelet (egy ciklus előre és egy vissza): Thomas-algoritmus.

Sajnos 2D és 3D áramlások esetében nem tridiagonál mátrixú.

# Példaprogram

1. Hasonló megoldást kapunk több, különböző paraméter változatra.
2. Hiba N²-el arányosan csökken. Másodrendű pontosság.
3. Néha oszcillál. Mikor kezd oszcillálni?

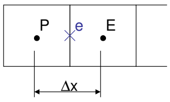
$$Pe = \frac{\rho\, u\, L}{\lambda / c_v}$$

$$Re = \frac{\rho\, u\, L}{\mu}$$

$$Pe_{\Delta x} = \frac{\rho\, u\, \Delta x}{\lambda / c_v} > 2$$

# Mesterséges „diffúzió”

A numerikus hibának egy fontos fajtája. A pontatlan interpolációból adódott:




$$T_e = T_P + \frac{\Delta x}{2}\frac{dT}{dx} + o(\Delta x)$$

ezt elhagyjuk

$$F_e = C_e T_P + C_e \frac{\Delta x}{2}\frac{dT}{dx} - D_e (T_E - T_P)$$

Olyan mintha megnöveltük volna a hővezetést!
Írjuk be T deriváltjának diszkrét közelítését:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_E - T_P}{\Delta x}$$

$$D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \longrightarrow \frac{\lambda_{mest}}{c_v \Delta x} = \frac{\rho\, u}{2} \longrightarrow \lambda_{mest} = \frac{\rho\, u\, c_v \Delta x}{2}$$

# Transzportivitás

Fizikai szempontból:
növekvő Pe esetén egyre $T_E$ hatása egyre kevésbé érvényesül $T_P$-re.

Tudja ezt a numerikus séma?

$$A_E = D_e - C_e / 2$$

$$C_e = \rho\, u \qquad D_e = \frac{\lambda}{c_v\, \Delta x} \qquad Pe = \frac{\rho\, u\, L}{\lambda / c_v}$$

$$A_E = \frac{D_e}{2}\left(2 - \frac{C_e}{D_e}\right) = \frac{D_e}{2}\left(2 - \frac{\rho\, u\, \Delta x}{\lambda / c_v}\right) = \frac{D_e}{2}(2 - Pe_{\Delta x})$$

Cella Peclet-szám: a konvektív és konduktív hőfluxusok hányadosa.
$Pe_{\Delta x}$>2 esetén $A_E$ nagysága újra nőni kezd.
A stabilitási probléma is ilyen esetekben lép fel.

# HDS séma

Spalding (1972)

Az a fontos, hogy az „A” együtthatók ne legyenek negatívak.
$Pe_{\Delta x}$ értéke alapján számoljuk a felületi fluxust:

$Pe_{\Delta x} \le -2$ $\quad F_e = C_e T_E$

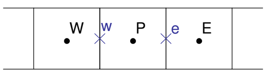
$-2 < Pe_{\Delta x} \le 2$ $\quad F_e = C_e\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{Pe_{\Delta x}}\right)T_P + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{Pe_{\Delta x}}\right)T_E\right]$

$2 < Pe_{\Delta x}$ $\quad F_e = C_e T_P$ $\quad$ Legalább kis $Pe_{\Delta x}$ esetén másodrendű.

$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

| $A_W$ | $A_E$ | $A_P$ |
|---|---|---|
| $Max\left(C_w, \left[D_w + \frac{C_w}{2}\right], 0\right)$ | $Max\left(-C_e, \left[D_e - \frac{C_e}{2}\right], 0\right)$ | $A_W + A_E$ |

# UDS séma




u>=0 esetén: $T_w = T_W, \quad T_e = T_P$

u<0 esetén: $T_w = T_P, \quad T_e = T_E$

$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

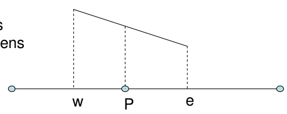
| $A_W$ | $A_E$ | $A_P$ |
|---|---|---|
| $Max(C_w, 0) + D_w$ | $Max(-C_e, 0) + D_e$ | $A_W + A_E$ |

További numerikus kísérletek...

A pontosság elsőrendűre csökken.

# SOU séma
## másodrendű szélfelőli súlyozás

Cellán belül lineáris interpoláció a gradiens segítségével:




Pl. a cellafali hőmérséklet: $T_e = T_P + \left.\frac{dT}{dx}\right|_P \frac{\Delta x}{2}$

A gradiens meghatározása két lépésben:

1. lépés $\quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_P = \frac{T_e' - T_w'}{\Delta x} \qquad T_e' = \frac{T_P + T_E}{2}, \qquad T_w' = \frac{T_W + T_P}{2}$

2. lépés $\quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_P$ értékét úgy korlátozzuk, hogy ne vezethessen be extrémumokat. Gradiens limiterek: C Hirsch.

# Numerikus diffúzió a gyakorlatban

2D hőtranszport hővezetés nélkül ( $\lambda$=0).