8.

7. Az impulzustétel és alkalmazásai

7.1. lecke: Az impulzustétel és az impulzusnyomatéki tétel

7.2. lecke: A Borda-féle kifolyónyílás, a Borda-Carnot átmenet és az Euler-turbinaegyenlet

7.3. lecke: A Pelton-turbina és a szárnyrács egy elemére ható erő számítása

7.4. lecke: A féltestre ható erő, a légcsavar, a szélkerék és a hófogó rács

7.5. lecke: Szabadsugarak

7.6. lecke: Légfüggönyök működése

7.7. lecke: Allievi elmélete, a sekélyvízi hullám

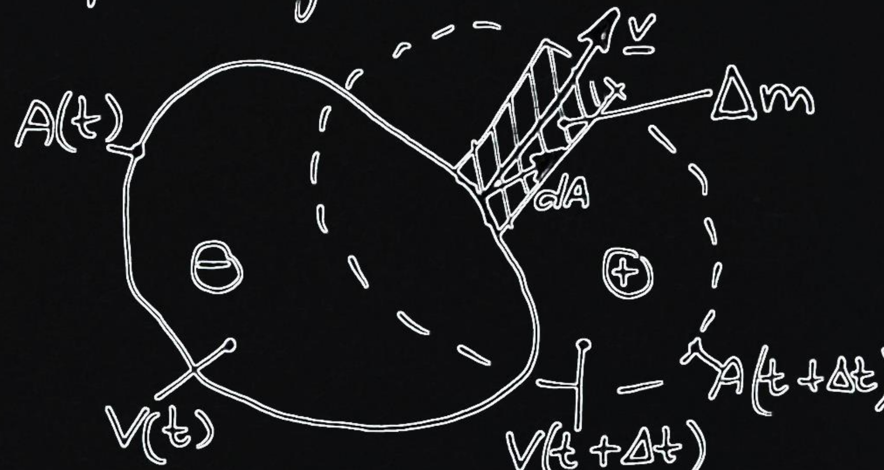
8.

7. Az impulzustétel és alkalmazásai

7.1. Az impulzustétel és az impulzusnyomatéki tétel

Elúszó folyadék mozgásmennyiségének időbeni változása ($\mu = 0$)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho \underline{v}\, dV}_{} = \int\limits_{V(t)} \rho \underline{g}\, dV - \int\limits_{A(t)} p\, d\underline{A}$$



$$\boxed{\Delta m = \rho \underline{v}\, d\underline{A} \cdot \Delta t}$$

Folyadékrész mozgásmennyiségének $(t+\Delta t)$ és (t) időpillanatbeli különbségeként felírva:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho \underline{v}\, dV = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\underbrace{\int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_{t+\Delta t}\, dV}_{\text{elmozdult}} - \underbrace{\int\limits_{V(t)} (\rho \underline{v})_{t}\, dV}_{\text{kiindulási}}\right]$$

8.

$$\int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t \, dV$$: Ez az a mozgásmennyiség, amellyel a folyadék az elmozdulás után $A(t+\Delta t)$ felülettel határolt térrészben a kiindulási t időpillanatban rendelkezett

Ezt vonjuk le és adjuk is hozzá az előző jobboldalhoz!

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V} (\rho \underline{v})_t \, dV = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_{t+\Delta t} \, dV \underbrace{- \int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t \, dV + \int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t \, dV}_{=\emptyset} - \int\limits_{V(t)} (\rho \underline{v})_t \, dV\right]$$

$$\text{I.)}\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_{t+\Delta t} \, dV - \int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t \, dV\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t \, dV \cdot \Delta t = \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V} (\rho \underline{v}) \, dV}$$

$$\text{II.)}\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_{V(t+\Delta t)} (\rho \underline{v})_t \, dV - \int\limits_{V(t)} (\rho \underline{v})_t \, dV\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{A} \underline{v} \cdot \rho \underline{v} \cdot \Delta t \cdot d\underline{A} = \boxed{\int\limits_{A} \underline{v}\, \rho (\underline{v} \cdot d\underline{A})}$$

IMPULZUSTÉTEL:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V} (\rho \underline{v}) \, dV + \int\limits_{A} \underline{v} \cdot \rho (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \int\limits_{V} \rho \underline{g} \, dV - \int\limits_{A} p \, d\underline{A}}$$

$\mu = \emptyset$, ahol

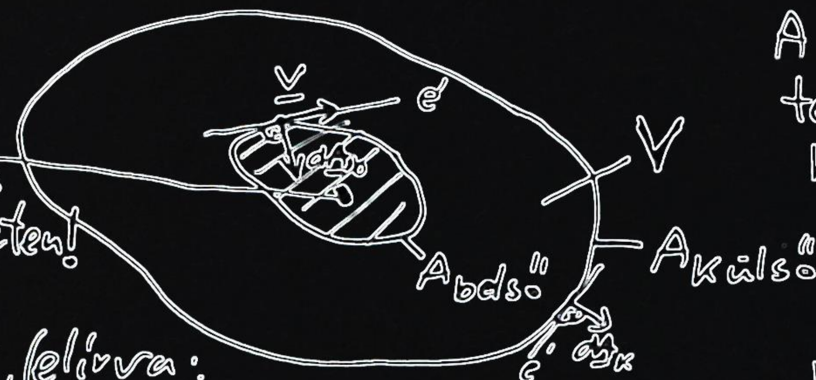
A : ellenőrző felület (A_e)

8.

7.1.2. Szilárd test az A_{ell} ellenőrző felületen belül

szilárd test

nincs átáramlás az $A_{belső}$ felületen!



A folyadék V térfogatát körbevevő A_{ell} ellenőrző felület két részből áll. ($A_{belső}$ és $A_{külső}$)

Impulzustételt felírva:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho \underline{v})\,dV + \int_{A_{külső}} \underline{v}\,\rho(\underline{v}\,d\underline{A}) + \underbrace{\int_{A_{belső}} \underline{v}\,\rho(\underline{v}\,d\underline{A})}_{=0} = \int_V \rho\,\underline{g}\,dV - \int_{A_{külső}} p\,d\underline{A} \underbrace{- \underbrace{\int_{A_{belső}} p\,d\underline{A}}_{\underline{R}}}_{-\underline{R}}$$

Jelöljük $\underline{R}$-el a szilárd testre ható erőt!

Ezzel az impulzustétel alakja, ha szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\mu = 0 \Leftarrow \big| \Rightarrow \mu \neq 0$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho \underline{v})\,dV + \int_A \underline{v}\,\rho(\underline{v}\,d\underline{A}) = \int_V \rho\,\underline{g}\,dV - \int_A p\,d\underline{A} - \underline{R} \;\Big|\; + \underline{S}}$$

8.

7.1.3. Impulzusnyomatéki tétel:

Előző impulzustétel alapján ($\underline{r}$ helyvektorral)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \underline{r}\times(\rho\underline{v})\,dV + \int_A \underline{r}\times\underline{v}\,\rho(\underline{v}\,d\underline{A}) = \int_V \underline{r}\times\rho\underline{g}\,dV - \int_A \underline{r}\times(p\,d\underline{A}) - \underline{M}\,\Big| + \underline{M}_s$$

ahol $\underline{M}$ a szilárd testre átadódó nyomaték

$\underline{M}_s$ az ellenőrző felületen ható súrlódó erők nyomatéka

ALKALMAZÁSOK (7.1.4.-től)

Alkalmazások keretében mutatjuk be az impulzustétel "használatát".

Két fő alkalmazási terület:

1.) Testre ható erő $\underline{R}\,(R_x, R_y, R_z)$ meghatározás

2.) $\rho \neq$ áll. esetén ismeretlen (pl. Δp nyomáskülönbség) meghatározása céljából

8.

Megfontolások impulzustétel ($\mu=\emptyset$, + szilárd test) alkalmazásához:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho \underline{v})\,dV + \int_A \underline{v}\,\rho(\underline{v}\,d\underline{A}) = \int_V \rho \underline{g}\,dV - \int_A p\,d\underline{A} - \underline{R}$$

tagok: I. II. III. IV. V.

1.) Feltételek áttekintése: $\mu=\emptyset$ o súrlódásmentes-e a közeg?
$\rho=\text{áll.}$ o összenyomhatatlan-e a közeg?
$\frac{\partial}{\partial t}=\emptyset$ o stacioner-e az áramlás?
$A_{e.f.}$ o van-e szilárd test az ellenőrző felületen belül?

2.) Melyek az ismert, melyek a keresett mennyiségek? (p, v, z, $\underline{R}$, ρ, T,.)

3.) Geometriai adottságok? (áramlás: keresztmetszetek, méretek)

4.) Koordináta-rendszer praktikus felvétele! (x, y, (z)) absz.? relatív?

5.) Vizsgált térrész rögzítése: A_{ef} ellenőrző felület felvétele

6.) Hol van átáramlás (BE/KI) az A_{ef} határain?

7.) Nyomás ismerete az A_{ef} határain?

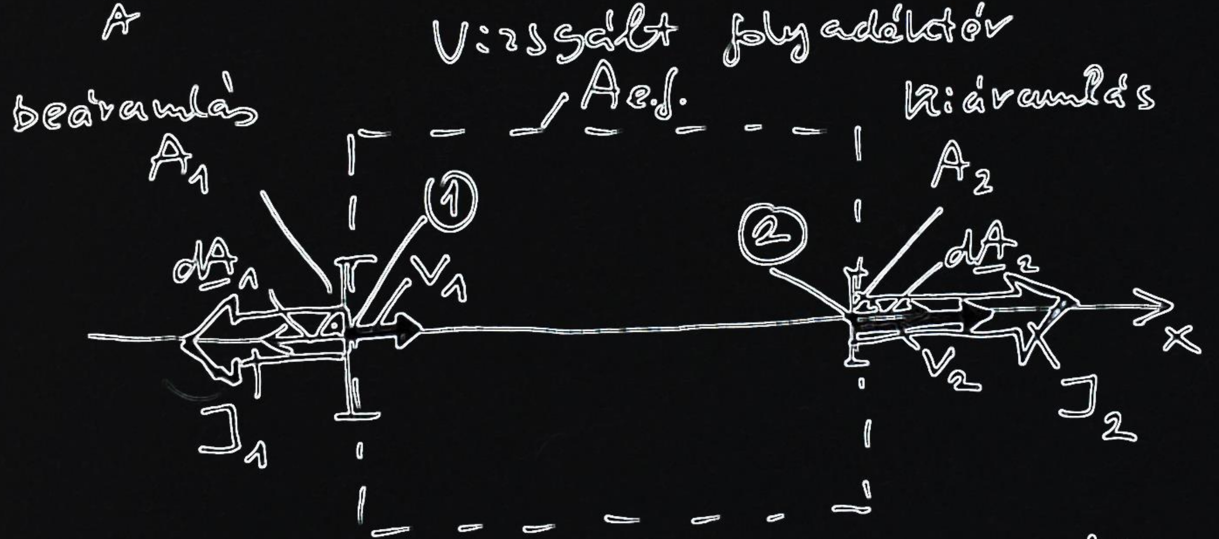
8.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\,\underline{v})\,dV + \int_A \underline{v}\,\rho\,(\underline{v}\,d\underline{A}) = \int_V \rho\,\underline{g}\,dV - \int_A p\,d\underline{A} - \underline{R} + \underline{S}.$$

I II III IV V VI

I.) Ha stacioner az áramlás, akkor I. tag értéke zérus!

II.) $\underline{J} = \int_A \underline{v}\rho(\underline{v}\,d\underline{A})$ az ún. impulzusáram-vektor (J_x, J_y, J_z)



$|\underline{J}_1| = \rho_1 v_1^2 A_1$ ⊖ ←

mivel $\alpha_1 = 180°$; $\cos\alpha_1 = -1$

$|\underline{J}_2| = \rho_2 v_2^2 A_2$ ⊕ →

mivel $\alpha_2 = 0°$; $\cos\alpha_2 = +1$

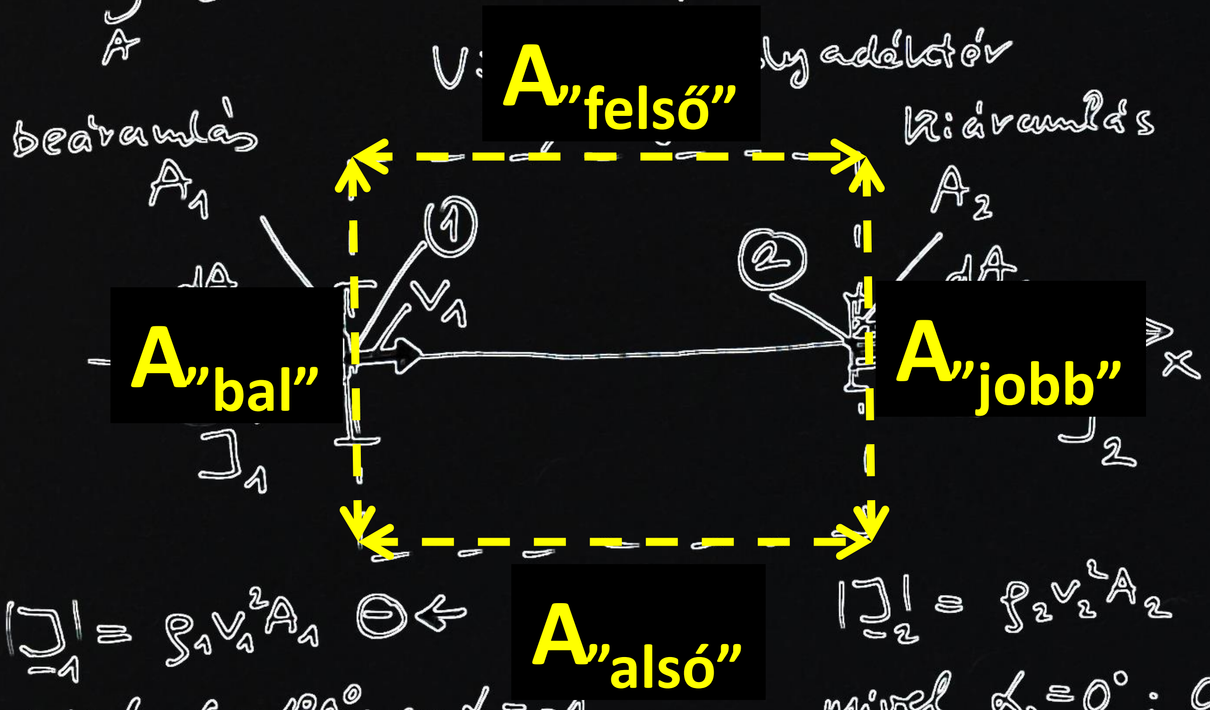
8.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\,\underline{v})\,dV + \int_A \underline{v}\,\rho\,(\underline{v}\,d\underline{A}) = \int_V \rho\,\underline{g}\,dV - \int_A p\,d\underline{A} - \underline{R} + \underline{S}.$$

I II III IV V VI

I.) Ha stacioner az áramlás, akkor I. tag értéke zérus!

II.) $\underline{J} = \int_A \underline{v}\,\rho\,(\underline{v}\,d\underline{A})$ az ún. impulzusáram-vektor (J_x, J_y, J_z)



$|\underline{J}_1| = \rho_1 v_1^2 A_1$ ⊖ ←

mivel $\alpha_1 = 180°$; $\cos\alpha_1 = -1$

$|\underline{J}_2| = \rho_2 v_2^2 A_2$ ⊕ →

mivel $\alpha_2 = 0°$; $\cos\alpha_2 = +1$

8.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\, \underline{v})\,dV + \int_A \underline{v}\,\rho\,(\underline{v}\, d\underline{A}) = \int_V \rho\, \underline{g}\, dV - \int_A p\, d\underline{A} - \underline{R} + \underline{S}.$$

I II III IV V VI

III) tag az erőtérből származó tömegre ható pl. súlyerő. Legtöbbször ez a többi taghoz képest elhanyagolható.

IV.) tag kiszámítása: az A_{ell} határain kell ismerni a p nyomáseloszlást. (=∅, ha p_0 mindenhol)

V.) $\underline{R}$: testre ható erő (R_x, R_y, R_z) komponenseit az impulzustétel x, y, z komponens-egyenleteiből! A szilárd testet teljes mértékben tartalmaznia kell az A_{ell}. ellenőrző felületnek!

Az impulzustétel [N] mértékegységű vektorokat tartalmaz. Ha pl. R_x és R_y testre ható erőkomponenseket keressük, akkor az x és y irányú komponens-egyenleteket kell felírnunk. /Legtöbb példa ilyen (x,y) síkáramlás példa.)

8.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\,\underline{v})\,dV + \int_A \underline{v}\,\rho\,(\underline{v}\,d\underline{A}) = \int_V \rho\,\underline{g}\,dV - \int_A p\,d\underline{A} - \underline{R} + \underline{S}.$$

I II III IV V VI

Megoldás menete

1., Feltételek és geometriai adatok, és a meghatározandó paraméter (=mi a kérdés?) tisztázása!

2., Koordináta-rendszer (x,y,(z)) felvétele! Célszerű áramlási irányban!

3., A$_{cs}$ ellenőrző felülettel körülhatárolni a vizsgált folyadékot! Célszerűen $\underline{v} \parallel d\underline{A}$ legyen! BE/KI áramlásnál csak egyszerű!

4.) Folytonossság tétel / $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$ vagy $v_1 A_1 = v_2 A_2$ /

5., Bernoulli-egyenlet / $p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho g z_2$ /

6., $\underline{I} = \int_A \underline{v}\rho(\underline{v}\,d\underline{A})$ impulzusáram vektorok "berajzolása", tisztázása

7. A p nyomás tisztázása A$_{cs}$ határoló felületeken

8. Impulzustétel komponens-egyenleteinek felírása, és rendezés és folytonossság tétel ill. Bernoulli-egyenlet segítségével megoldás a keresett mennyiségre. (pl. $R_x, R_y \Rightarrow |\underline{R}|$)