



# 8. Súrlódásos közegek áramlása

## 9. Határrétegek

## 10. Hidraulika

# 11. Áramlásba helyezett testre ható erő

Áramlástan előadást kiegészítő prezentáció  
Dr. Suda Jenő Miklós, adjunktus  
BME Áramlástan Tanszék

Felhasznált szakirodalom:

Dr. Lajos T.: Az áramlástan alapjai tankönyv  
Dr. Balogh M.: Turbulencia modellezése előadásjegyzet  
Dr. Suda J.M.: Járműáramlástan előadásjegyzet



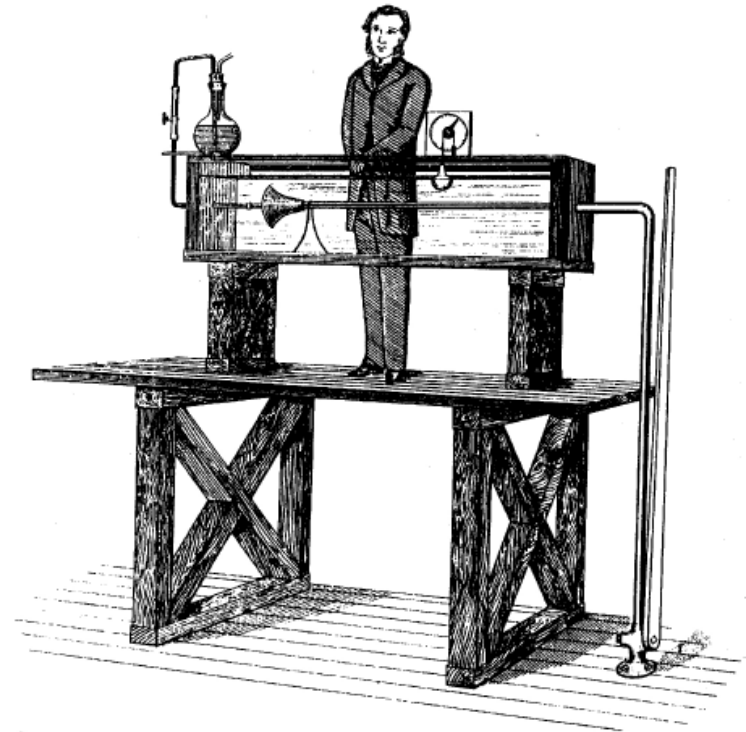


# 8. Súrlódásos közegek áramlása

Áramlástan előadást kiegészítő prezentáció  
Dr. Suda Jenő Miklós, adjunktus  
BME Áramlástan Tanszék

Felhasznált szakirodalom:

Dr. Lajos T.: Az áramlástan alapjai tankönyv  
Dr. Balogh M.: Turbulencia modellezése előadásjegyzet  
Dr. Suda J.M.: Járműáramlástan előadásjegyzet



A Reynolds-féle kísérlet





# Súrlódásos közegek áramlása

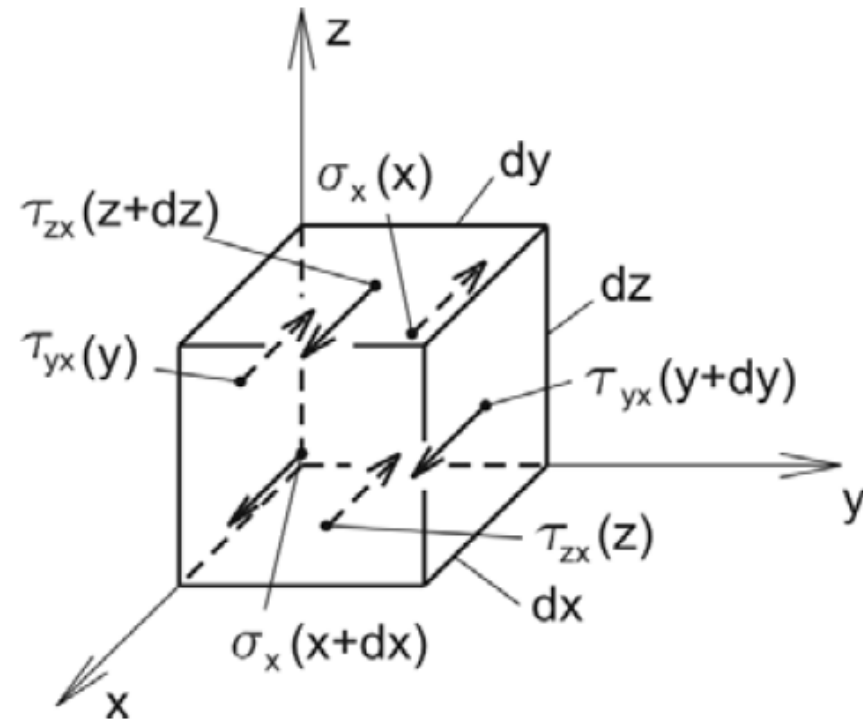
$\mu \neq 0$

Feszültségtenzor:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\sigma$ : húzó-nyomó feszültségek  
 $\tau$ : csúsztatófeszültségek

Csak az x irányú  $\sigma$  és  $\tau$  feszültségek:



**8.2.ábra**  
Elemi folyadék rész





**N-II.: mozgásegyenlet:**

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \Phi \nabla.$$

ahol  $\nabla$ : nabla operátor:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$$

**x:**

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right).$$

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

A felületre merőleges  $\sigma$  húzófeszültség komponensek két részből tevődnek össze: a statikus nyomásból és az alakváltozási sebességből adódó húzófeszültségből. Az alakváltozás eredményeként létrejövő csúsztatófeszültségek következtében ugyanis a felületre merőleges  $\sigma'$  húzófeszültségek is keletkeznek, azaz pl. a folyadékban keletkező húzófeszültség x irányú komponensére írható:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x.$$

**itt a második tag ( $\sigma'$ ) a látszólagos húzó-/nyomó feszültség**





**Kontinuitás tétele ( $\rho = \text{áll.}$ ):**

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \underline{v} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{3} \text{div } \underline{v}$$

**X irányban a húzó-/nyomófeszültség:  $p$  nyomás és  $\sigma'_x$  látszólagos húzó/nyomófeszültség**

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x \quad \text{ahol:} \quad \sigma'_x = 2\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div } \underline{v} \right) \quad \text{az ún. látszólagos feszültség}$$

**Húzó-/nyomófeszültség ezzel:**

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v}$$

**Feszültségtenzor**

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} \end{bmatrix}$$

**Feszültségtenzor (az  $\underline{\underline{A}}_S$  alakváltozási sebesség tenzorral felírva):**

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left( -p - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} \right) \underline{\underline{E}} + 2\mu \underline{\underline{A}}_S \quad \text{Dr. Suda Jenő Miklós}$$





Súrlódásos közeg mozgásegyenlete:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \underline{\Phi} \underline{\nabla}.$$

ahol a feszültségtenzor (látszólagos húzó-/nyomófeszültségekkel):

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \end{bmatrix}.$$

A mozgásegyenlet egyik (x irányú) komponensegyenlete kifejtve:

$$\begin{aligned} \text{X: } \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$





$$\mathbf{x}: \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \right\}.$$

Tételezzük fel, hogy  $\mu = \text{áll.}$  és  $\rho = \text{áll.}$ , azaz az áramló newtoni közeg dinamikai viszkozitása és sűrűsége állandó. Figyelembe véve továbbá, hogy  $\rho = \text{áll.}$  esetén a (2.23) folytonosság tétele értelmében  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ , e feltételezéssel a (8.15) összefüggés jobb oldalán lévő kapcsos zárójelben lévő kifejezés az alábbi alakra hozható:

$$\mathbf{x}: \quad \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \right) = v \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\ + v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (8.16)$$

Miután az egyenlet jobb oldalán álló második tag a  $\operatorname{div} \underline{v}$  x szerinti deriváltja, amely  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$  következtében zérus, felírható az állandó sűrűség és viszkozitás esetén érvényes mozgásegyenlet, a **Navier-Stokes-egyenlet**, amelyet

**Navier\*** 1822-ben, majd **Stokes** 1845-ben vezetett le:





$\mu \neq 0$

$\mu = \text{áll.}, \rho = \text{áll.}$

## 8.2.1. A Navier-Stokes-egyenlet

### Navier-Stokes-egyenlet komponensegyenletei

$$\begin{aligned}
 \text{x: } & \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
 \text{y: } & \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
 \text{z: } & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned}$$

### Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v}$$

N-S egyenlet = [Euler-egyenlet] + [a súrlódás hatását kifejező  $\nu \Delta \underline{v}$  tag]





**N-S egyenlet = [Euler-egyenlet] + [a súrlódás hatását kifejező  $\nu \Delta \underline{v}$  tag]**

## Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v}$$

$\mu \neq 0$

$\mu = \text{áll.}, \rho = \text{áll.}$

$\underline{a}_{\text{lok}}$   
 $\underline{a}_{\text{konv}} = \underline{D}\underline{v}$

## Navier-Stokes-egyenlet komponensegyenletei

**x:**  $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$

**y:**  $\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$

**z:**  $\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$





## Euler-egyenlet

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad \mu=0$$

## Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v} \quad \begin{array}{l} \mu \neq 0 \\ \mu = \text{áll.}, \rho = \text{áll.} \end{array}$$



\* Navier, Claude Louis Marie H. (1785–1836) Francia fizikus és matematikus. Az École Polytechnique professzora, a Francia Akadémia tagja. Lerakta a rugalmasságtan általános alapegyenletének alapjait. 1822-ben fogalmazta meg a viszkózus folyadékokra vonatkozó egyenletet, amelyet később Stokes öntött végleges matematikai formába [13].



\* Stokes, Sir George, Gabriel (1819–1903) Angol matematikus és fizikus. A Királyi Társaság titkára, majd elnöke. A fizikai optika és a folyadékok mechanikája területén kiemelkedő eredményeket ért el. Nevéhez fűződik a folyadékok mozgását leíró, Navier által 20 évvel korábban megfogalmazott egyenlet napjainkban alkalmazott formába öntése (1847). Ő állapította meg a folyadékdeformáció és a feszültségek közötti lineáris kapcsolatot [13].





## Euler-egyenlet

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

### az Euler-egyenlet komponensegyenletei

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

## Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$





Látható, hogy a Navier-Stokes-egyenlet a jobb oldal utolsó tagjával, a  $\nu \Delta \underline{v}$  taggal különbözik a súrlódásmentes esetre levezetett Euler-egyenlettől (ld. (3.18) összefüggés).

A súrlódás hatását kifejező tagban szereplő  $\Delta \underline{v}$  felbontható:

$$\Delta \underline{v} = \text{grad div } \underline{v} - \text{rot rot } \underline{v} .$$

Miután  $\text{div } \underline{v} = 0$ , írható:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \text{rot rot } \underline{v} .$$

kapcsolat a a súrlódás  
hatása és az örvényesség  
között (8.20)

A (8.20) egyenlet jól mutatja az áramlás örvényessége és a súrlódás közötti kapcsolatot. Potenciális áramlás ( $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ ), sőt állandó örvényességű áramlás esetén (pl. az **1.2. ábrán** látható két síklap közötti áramlásnál) a súrlódásnak nincs szerepe, a Navier-Stokes-egyenlet az Euler-egyenletbe megy át. Az **M.8.2.1.** melléklet két példát mutat be a valóságos, súrlódásos közeg olyan áramlásaira, amelyekben a folyadékreszek nem forognak, azaz  $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ . Ilyenkor az áramlás potenciális, a Navier-Stokes-egyenlet súrlódásos tagja zérus, tehát az áramlást a súrlódásmentes közegre levezetett Euler-egyenlet írja le.



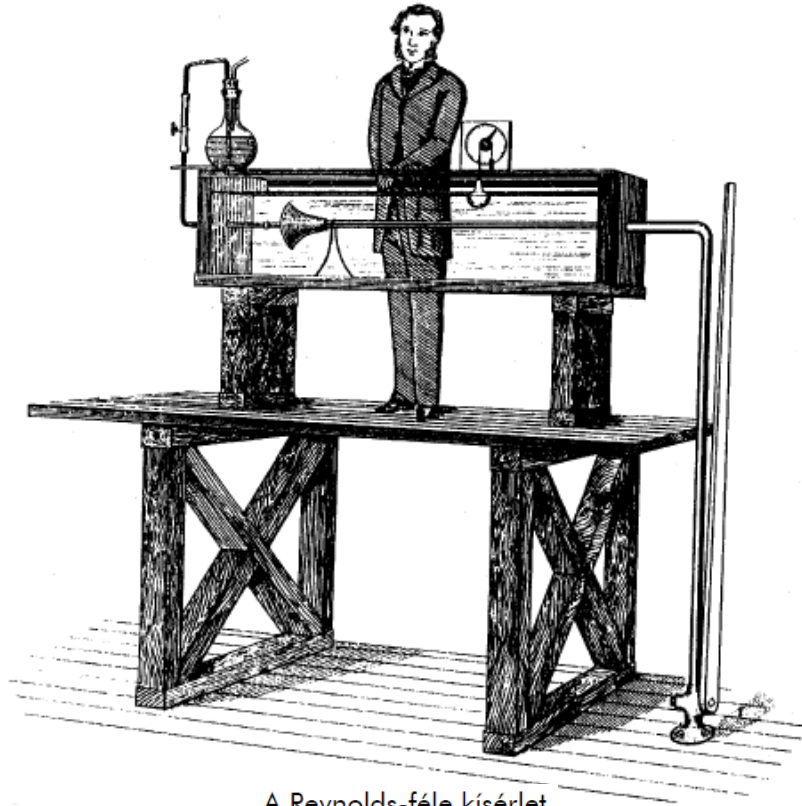


## 8.3. lecke

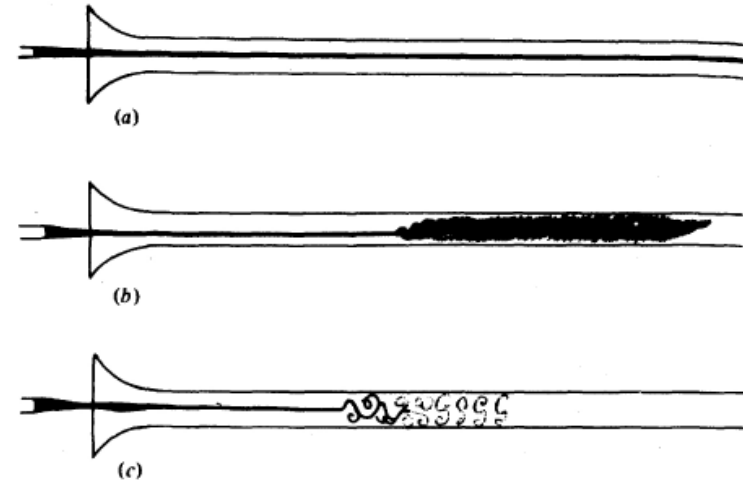
### Lamináris és turbulens áramlások

# Reynolds-kísérlet, 1883

Osborne Reynolds (1842-1912) angol matematikus és fizikus



A Reynolds-féle kísérlet



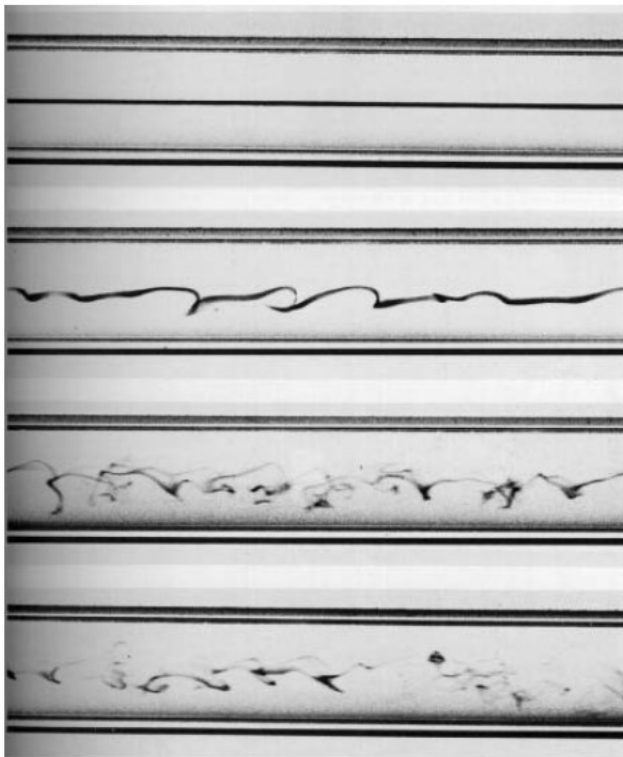
\* Reynolds, Osborne (1842–1912) Angol matematikus és fizikus. A Manchesteri Egyetemen oktatott és kutatott. Foglalkozott a felhők elektromos tulajdonságaival, esőcseppek kialakulásával, a folyadékok és gázok áramlásával, kenélmélettel és termodinamikával. Ő írta le először az áramló közegben lejátszódó impulzus- és hőtranszport azonos mechanizmusát, a csősúrlódási és a hőátadási tényező közötti kapcsolatot. Foglalkozott a folyótorkolatokban lévő áramlás megismerése érdekében végzett kisminta-kísérletek feltételeivel. Különösen a viszkózus folyadékokkal végzett kísérletek tették híressé. Róla nevezték el a tethetatlenségi- és súrlódóerők viszonyát kifejező számot [13].





## 8.3. lecke

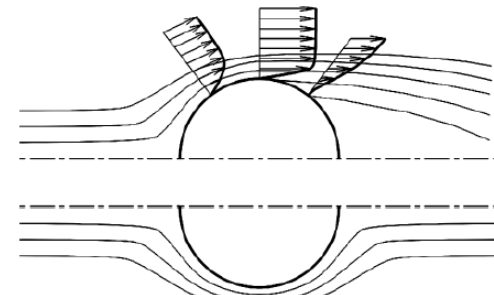
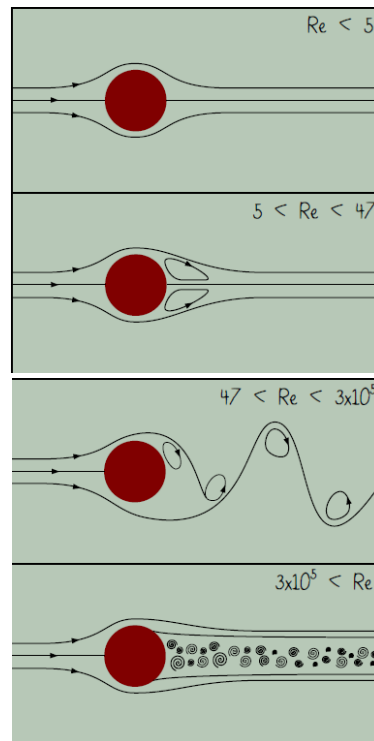
### Lamináris és turbulens áramlások



**8.7. ábra**

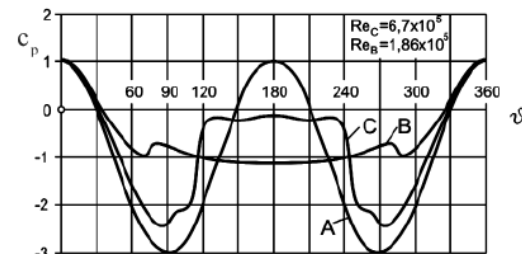
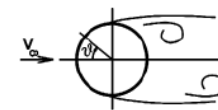
A Reynolds-féle kísérlet

- Reynolds szám:  $Re = \frac{vL}{\nu}$
- Lamináris réteges áramlások ( $Re < 2300$ )
- Turbulens áramlások (tranzien,  $Re > 2300$ )



**9.11. ábra**

Valóságos és ideális közeg áramlása henger körül



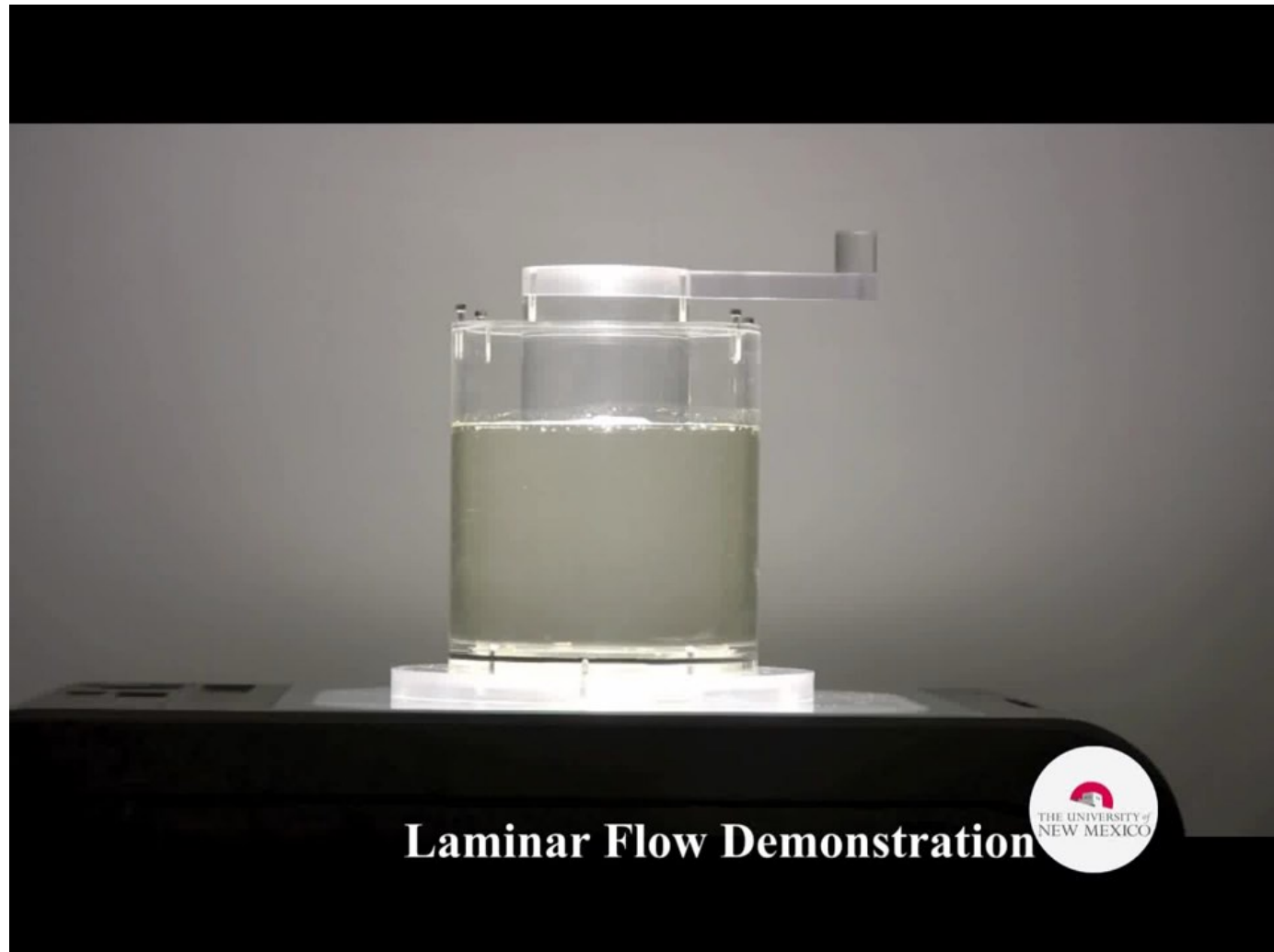
**9.12. ábra**

Áramkép és nyomásmegosztás henger körüli áramlásban



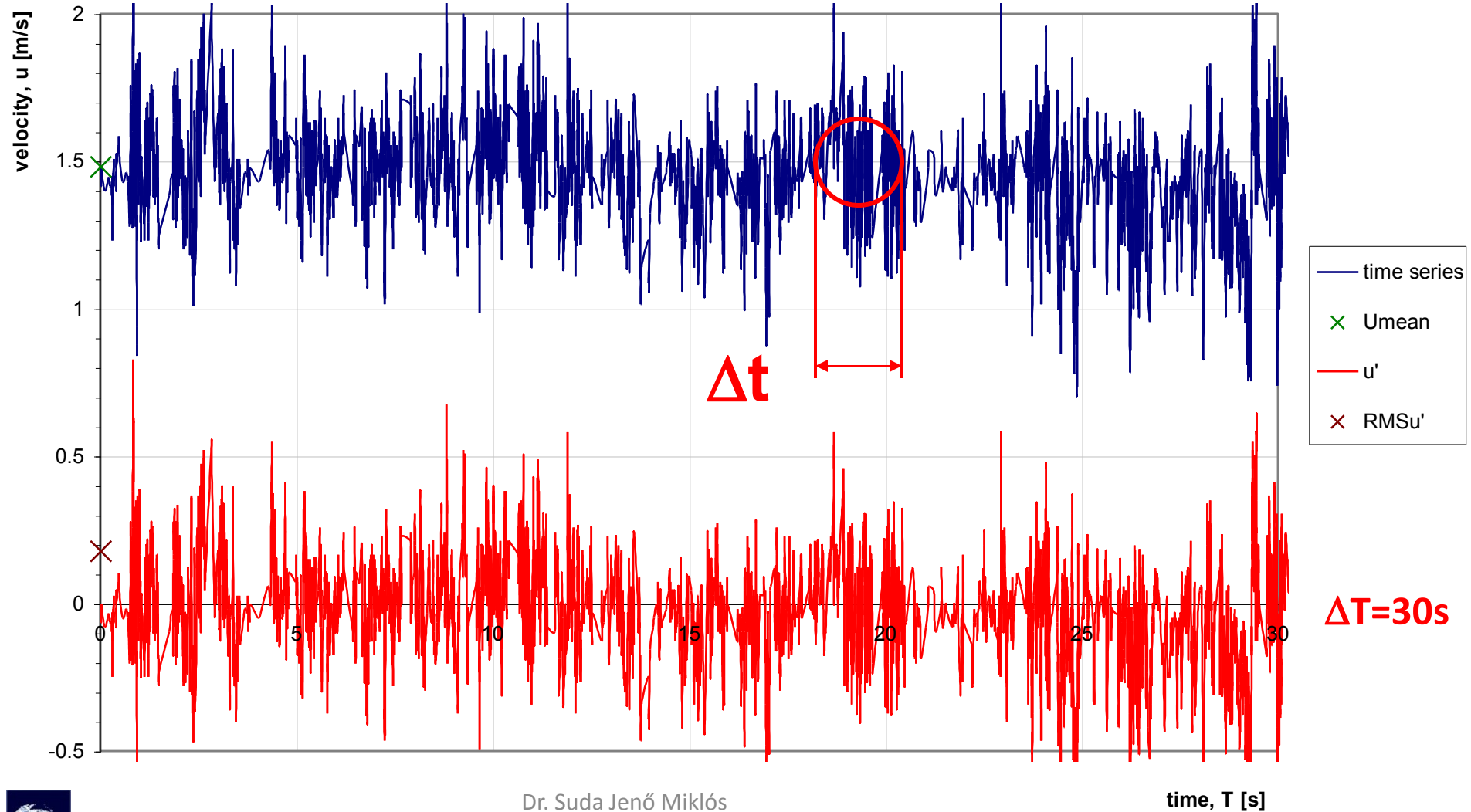
## 8.3. lecke

### Lamináris és turbulens áramlások



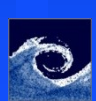
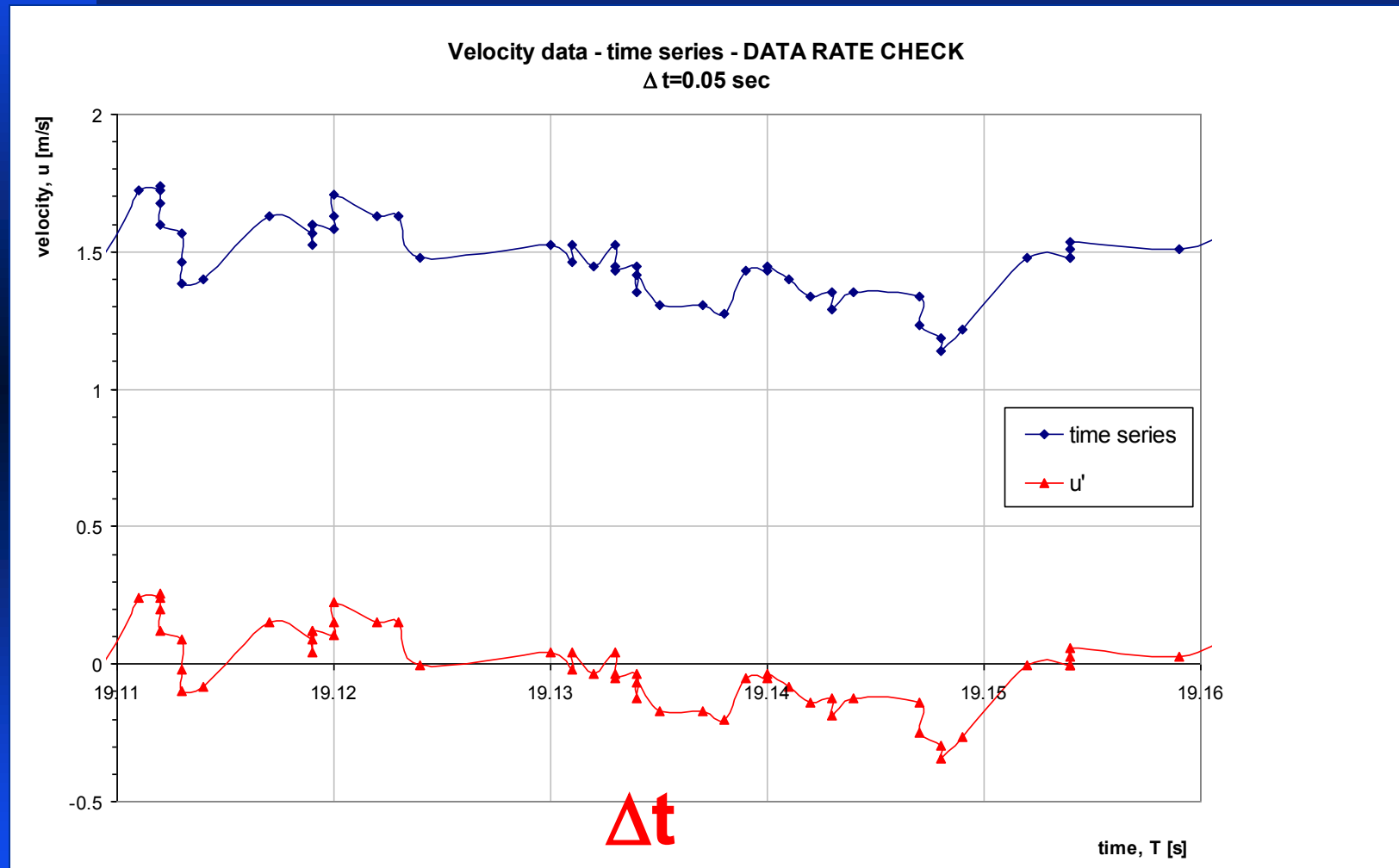
# Lézer Doppler sebességmérés

Velocity data - time series - DATA RATE CHECK  
Nr. of samples = 20 000



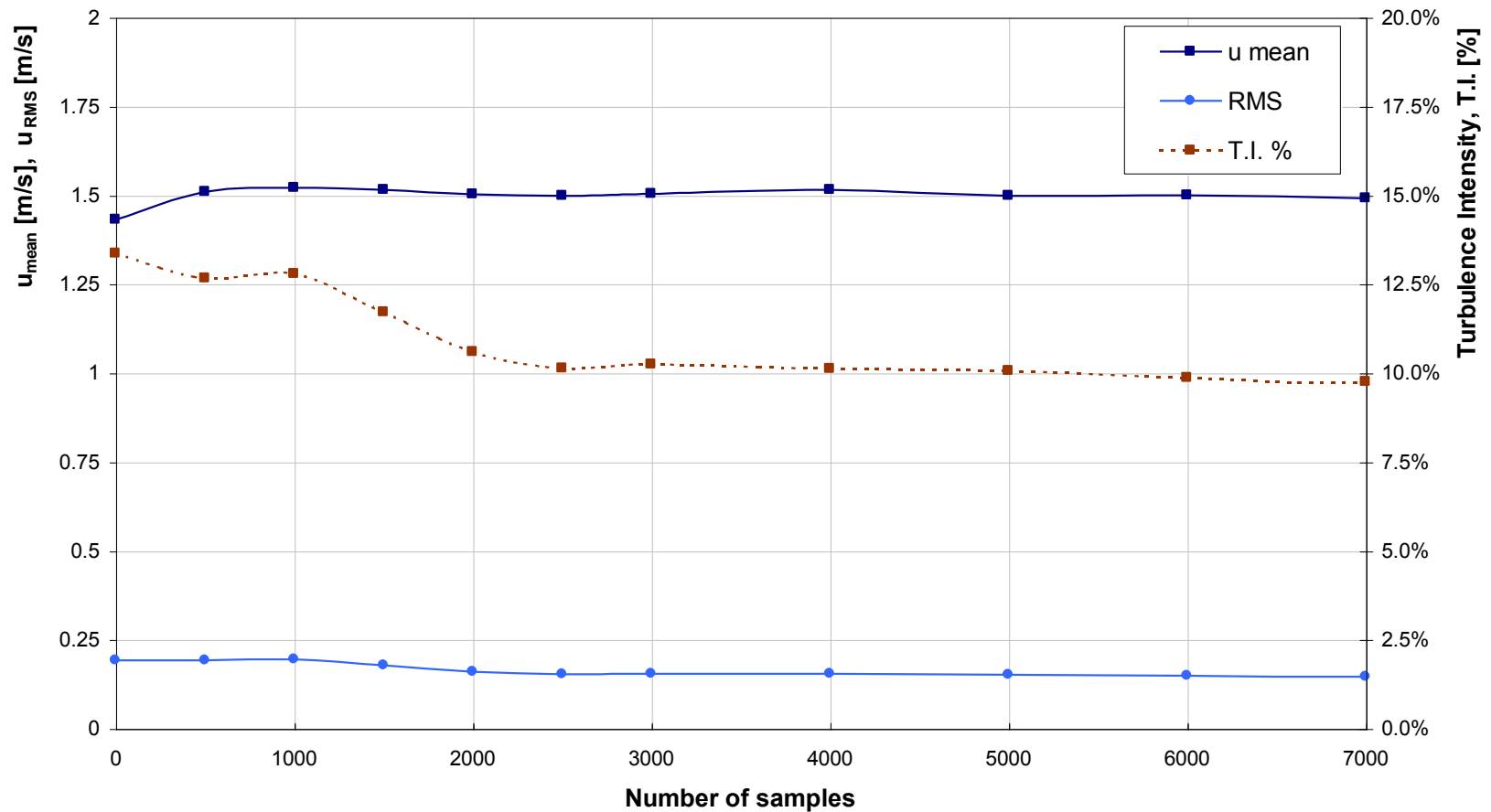


# Lézer Doppler sebességmérés



# Lézer Doppler sebességmérés

"Number of Samples" CHECK at position z=50mm, y=20mm



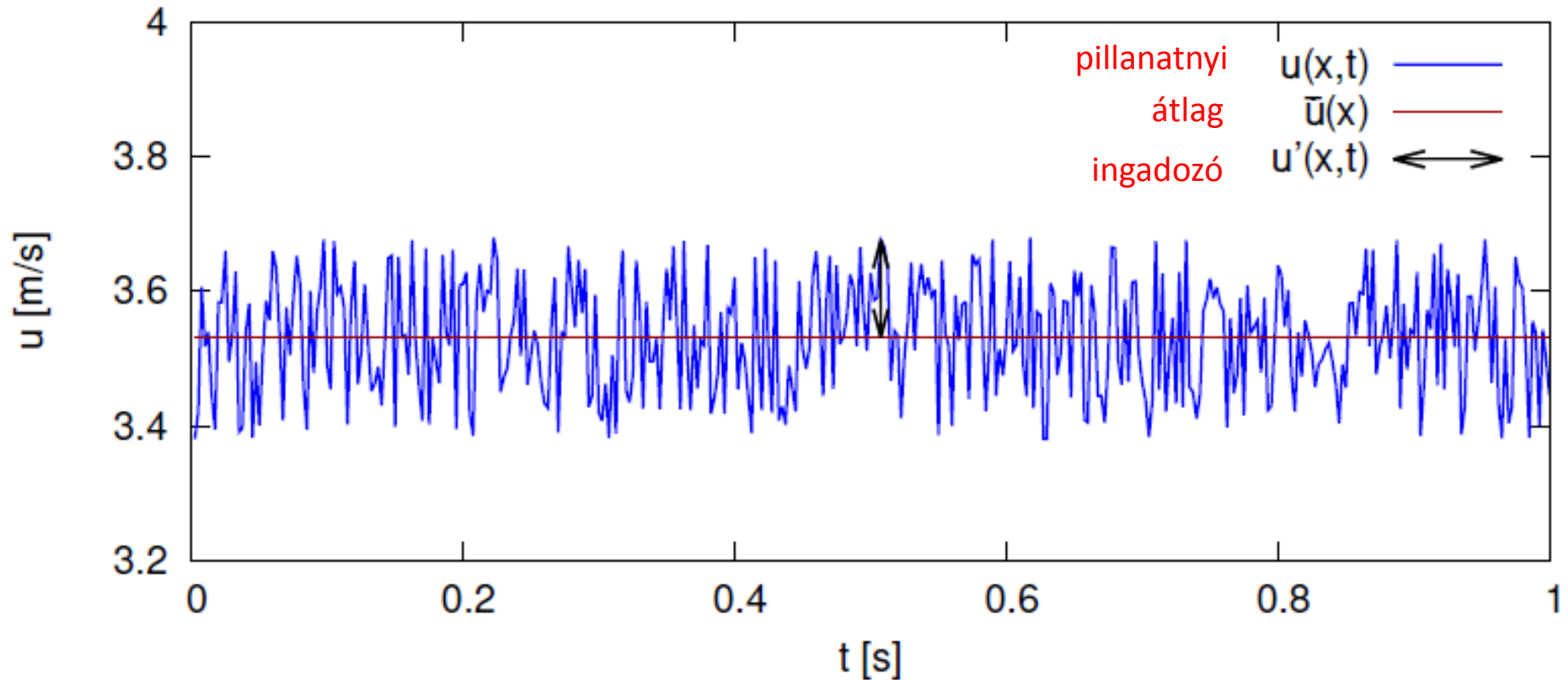


Vagy más jelöléssel:

$$\underline{U}(\underline{r},t) = \underline{u}(\underline{r},t) \cdot \underline{i} + \underline{v}(\underline{r},t) \cdot \underline{j} + \underline{w}(\underline{r},t) \cdot \underline{k}$$

$$\underline{u} = \bar{u} + u'$$

pillanatnyi      átlag      ingadozó





Áramlási sebességvektor:  $\underline{v}(\underline{r},t) = v_x(\underline{r},t)\cdot\underline{i} + v_y(\underline{r},t)\cdot\underline{j} + v_z(\underline{r},t)\cdot\underline{k}$

Vagy más jelöléssel:

$$\underline{U}(\underline{r},t) = u(\underline{r},t)\cdot\underline{i} + v(\underline{r},t)\cdot\underline{j} + w(\underline{r},t)\cdot\underline{k}$$

Sebesség-komponens:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x$$



pillanatnyi      átlag      ingadozó

RMS (root-mean-square):

$$v_{x,rms} = \sqrt{\overline{v_x'^2}}$$

Turbulencia intenzitás (pl. x):

$$T.I._x = \frac{v_{x,rms}}{\bar{v}_x} = \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2}}}{\bar{v}_x}$$





### 8.3. lecke

#### Lamináris és turbulens áramlások

## Turbulencia = ?

### Horace Lamb, 1932

„Már idős ember vagyok, és mikor meghalok és a mennyországba jutok, két dolog van, amelyekre a megvilágosodás reményével gondolok. Az egyik a kvantum-elektrodinamika, a másik pedig a folyadékok turbulens áramlása. Az előbbivel kapcsolatban meglehetősen optimista vagyok.”

### Peter Bradshaw, 1994

„A turbulenciát minden bizonnyal a sátán találta fel a teremtés hetedik napján, mikor a Jóisten már nem figyelt oda.”





*„Főáramlás a nagy örvényt,  
Nagy a kisebbet táplálja;  
Kis örvény a még kisebbet,  
S elérünk a viszkozításra.”*  
(Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai)

**Lewis Fry Richardson (1920):**

*„Big whirls have little whirls,  
that feed on their velocity;  
and little whirls have lesser whirls,  
and so on to viscosity.”*

*„Nagy örvény kisebbet plántál,  
melyet sebességével táplál;  
majd az még kisebbet szülvén,  
viszkozításba tűnik szürkén.”*





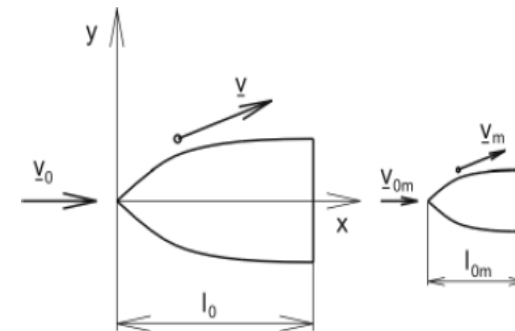
## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

A kísérleti vizsgálatokat technikai és költségkímélési okokból is gyakran az eredeti berendezés kis méretű modelljén (kismintáján) hajtjuk végre. Így, pl. ha meg kell határozni egy tervezés alatt lévő hajó motorjának előírt sebesség eléréséhez szükséges teljesítményét, vagy a korrekt szilárdsági méretezéshez ismerni kell egy szerkezetre, vagy épületre ható szélerőt, csak **kisminta-kísérletek** jöhetnek szóba.

Egy kisminta-kísérletnek csak akkor van értelme, ha eredménye megfelelő biztonsággal átvihető, felhasználható a nagy kivitelnél. Ez a feltétel akkor valósul meg, ha a kisminta és a nagy kivitel körüli áramlás hasonló. Vizsgáljuk meg, hogy mikor tekintünk két áramlást hasonlóknak, és melyek az **áramlások hasonlóságának** feltételei összenvomhatatlan közegek esetén!

A **kisminta** körüli áramlás akkor hasonló a **nagy kivitel** körüli áramláshoz, ha megegyező függvények írják le a nagy kivitel és a kisminta sebesség- és nyomásmegoszlását – természetesen a nagy kivitel és a kisminta megfelelő jellemző fizikai paramétereivel dimenziótlanított formában.

Mikor hasonló két áramlás, azaz mikor azonos a dimenziótlan sebességet és nyomást leíró (8.61) függvény a nagy kivitelnél és a kismintánál? Nyilvánvalóan akkor, ha a két áramlást ugyanaz a dimenziótlan parciális differenciálegyenlet-rendszer írja le, és ugyanazok a kezdeti- és peremfeltételek a dimenziótlan hely- és időkoordinátákban.



**8.10. ábra**

Nagy kivitel és kisminta körüli áramlás hasonlósága





## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

### dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet

Írjuk fel a Navier-Stokes-egyenlet x irányú komponens-egyenletét a (8.17) összefüggés alapján!

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (8.62)$$

Szorozzuk be a (8.62) egyenlet mindkét oldalán lévő tagokat  $\frac{l_0}{v_0^2}$ -tel, azaz dimenziótlanítsuk a Navier-Stokes-egyenlet x irányban felírt komponens-egyenletét:

### dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{t}{l_0 / v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \dots = \frac{g_x l_0}{v_0^2} - \frac{\partial \left( \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\nu}{v_0 l_0} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)^2} + \dots \right). \quad (8.63)$$







## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

**dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet**

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{t}{l_0 / v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \dots = \frac{g_x l_0}{v_0^2} - \frac{\partial \left( \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{v}{v_0 l_0} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)^2} + \dots \right). \quad (8.63)$$

Hasonlóképpen fel lehet írni a **dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet** y és z irányú komponens-egyenletét, valamint a folytonosság tétele dimenziótlanított formáját, figyelembe véve, hogy a Navier-Stokes-egyenlet alkalmazásakor már eldöntöttük, hogy a  $\rho = \text{áll.}$  feltételezéssel élünk. Ez esetben a folytonosság tétele a  $\text{div } \underline{v} = 0$  alakot ölti, amely dimenziótlanítva:

**dimenziótlan folytonosság tétele**

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\partial \left( \frac{v_y}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{y}{l_0} \right)} + \frac{\partial \left( \frac{v_z}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{z}{l_0} \right)} = 0. \quad (8.64)$$





## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

### 8.5.2. Az áramlások hasonlóságának feltételei

- a) Azonos dimenziótlan differenciálegyenlet írja le mindkét áramlást, ami azt jelenti, hogy a (8.63) összefüggésben (és a további két komponens-egyenletben) szereplő állandóknak és együtthatóknak azonos értékűnek kell lennie a két (nagy kivitel és a kisminta körüli) áramlásra vonatkozóan. A nagy kivitel és a modell esetén ez a feltétel annyit tesz, hogy

$$\frac{g_x l_0}{v_0^2} = \frac{g_{xm} l_{0m}}{v_{0m}^2}, \quad (8.65)$$

$$\frac{v}{v_0 l_0} = \frac{v_m}{v_{0m} l_{0m}}; \quad (8.66)$$

- b) Saját léptékben azonosak a **kezdeti- és peremfeltételek**. Ezt a feltételt általában a modell és a nagy kivitel **geometriai hasonlóságával**, az áramlási tér peremén hasonló viszonyok biztosításával és az instacionárius hatások megfelelő modellezésével (ld. később) valósíthatjuk meg.

---

**azonos dimenziótlan  
differenciálegyenlet**

---



---

**azonos kezdeti- és  
peremfeltételek**

---

**geometriai hasonlóság**





## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

**Froude\*-szám:**

$$\text{Fr} = \frac{V_0}{\sqrt{g l_0}},$$

$$\frac{V_{0m}}{V_0} = \sqrt{\frac{l_{0m}}{l_0}},$$



\* Froude, William (1810–1879) Angol építőmérnök. Hajótervezéssel, majd hajók áramlási ellenállásának kisminta-kísérletekkel történő meghatározásával foglalkozott. Ő javasolta a hajó ellenállásának hullám- és súrlódási ellenállásra való felbontását, és megállapította a hullám-ellenállás modellkísérlettel történő meghatározásánál a helyes modellezés feltételét [13].

**Reynolds-szám:**

$$\text{Re} = \frac{V_0 l_0}{\nu}$$

$$\text{Re}_m = \text{Re} \Rightarrow \frac{V_{0m}}{V_0} = \frac{l_0}{l_{0m}} \frac{V_m}{\nu} = \frac{l_0}{l_{0m}}$$

**Strouhal\*-szám:**

$$\text{Str} = \frac{f l_0}{V_0},$$



\* Strouhal, Cenek (1850-1922) cseh fizikus. Prágában a Károly Egyetemen tanult, majd würzburgi kutatásai után itt lett a kísérleti fizika tanára. Akusztikai tanulmányai során definiálta a később róla elnevezett Strouhal-számot. A modern cseh kísérleti fizika megalapítója [13].

**Euler-szám:**

$$\text{Eu} = \frac{p - p_0}{\rho V_0^2},$$

**Weber-szám**

$$\text{We} = \frac{\rho l_0 V_0^2}{\sigma}$$





## hasonlósági számok, mint erők hányadosai

$$\text{Re} \sim \frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{súrlódásból származó erő}} = \frac{F_T}{F_S} \sim \frac{v_0^2 / l_0}{\nu v_0 / l_0^2} = \frac{v_0 l_0}{\nu},$$

$$\text{Fr} \sim \sqrt{\frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{súlyerő}}} = \sqrt{\frac{F_T}{F_G}} \sim \sqrt{\frac{v_0^2 / l_0}{g}} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}},$$

$$\text{Eu} \sim \frac{\text{nyomásból származó erő}}{\text{tehetetlenségi erő}} = \frac{F_P}{F_T} \sim \frac{(p - p_0) l_0}{\rho l_0 v_0^2} = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2},$$

$$\text{We} \sim \frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{felületi feszültségből származó erő}} = \frac{F_T}{F_F} \sim \frac{v_0^2 / l_0}{\sigma / l_0^2 \rho} = \frac{\rho v_0^2 l_0}{\sigma}$$



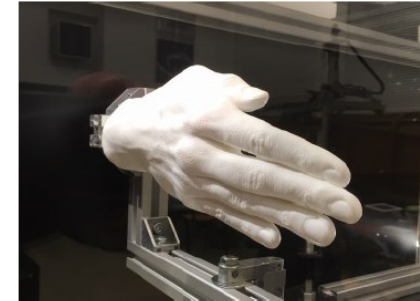


## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

### X.PÉLDA (ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA)

X. FELADAT „A” csoport „B” csoport

Egy úszó kéz 1:1 méretarányú modelljén aerodinamikai paramétereket (pl. ellenálláserő) kell meghatároznunk, viszont nincs vízcsatorna a laborunkban csak szélcsatorna. Olyan, a kéz körüli áramláshoz hasonló körülményeket kell biztosítanunk, amikor az úszó keze az úszómedencében nyugalomban lévő vízben éppen  $v=2\text{m/s}$  ( $v=1,5\text{m/s}$ ) sebességgel mozog a vizsgált időpillanatban. Ez a  $v$  megfúvási sebesség vehető a  $v_0$  jellemző sebességnek, míg a kéz körüli áramlásra jellemző hosszlépték  $l_0=0,1\text{m}$ .



**KÉRDÉSEK: A)** Melyik hasonlósági szám azonosságát kell biztosítani? Indokolja választát!

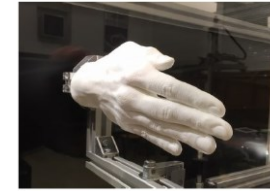
**B)** Mekkora megfúvási sebességet kell beállítani a szélcsatornában, hogy a valósághoz hasonló áramlást hozzunk létre a modell kéz körül? Válaszát számítással indokolja!

ADATOK		valós	modell
Megnevezés	mértékegység	víz	levegő
sűrűség	$\text{kg}/\text{m}^3$	1000	1,184
hőmérséklet	$^{\circ}\text{C}$	18	21
viszkozitás	$\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$	$10^{-3}$	$18,4\cdot 10^{-6}$
megfúvási sebesség	$\text{m}/\text{s}$	2	?
erőtér térerősségvektora	$\text{N}/\text{kg}$	9,81	9,81
légtörési nyomás	$\text{Pa}$	100 453	99 870





## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk



### MEGOLDÁS

**Reynolds-szám:**

$$\text{Re} = \frac{v_0 l_0}{\nu}$$

**A)** A kéz körüli áramlásban a tehetetlenségi és a súrlódó erők dominálnak, így a Reynolds-szám azonosság a hasonlósági feltétel a vízbeli valós („V”) és a levegőbeli modell („M”) áramlás között.

**B) Hasonló áramlás feltétele:**  $\text{Re}_{\text{Valós}} = \text{Re}_{\text{Modell}}$

$$\frac{v_{0,\text{valós}} \cdot l_{0,\text{valós}}}{\nu_{\text{valós}}} = \frac{v_{0,\text{modell}} \cdot l_{0,\text{modell}}}{\nu_{\text{modell}}}$$

Az M=1:1 méretarány esetén a jellemző hosszlépték azonos, így :

$$v_{0,\text{modell}} = v_{0,\text{valós}} \frac{\nu_{\text{modell}}}{\nu_{\text{valós}}} = v_{0,\text{valós}} \frac{\frac{\mu_{\text{modell}}}{\rho_{\text{modell}}}}{\frac{\mu_{\text{valós}}}{\rho_{\text{valós}}}} = 2 \cdot \frac{18,4 \cdot 10^{-6}}{\frac{1,184}{1000}} = 31,08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**A „B” csoport adatokkal az eredmény:**

$$v_{0,\text{modell}} = v_{0,\text{valós}} \frac{\nu_{\text{modell}}}{\nu_{\text{valós}}} = v_{0,\text{valós}} \frac{\frac{\mu_{\text{modell}}}{\rho_{\text{modell}}}}{\frac{\mu_{\text{valós}}}{\rho_{\text{valós}}}} = 1,5 \cdot \frac{18,4 \cdot 10^{-6}}{\frac{1,184}{1000}} = 23,31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$





## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

### X.PÉLDA (ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA)

#### X. FELADAT

Személyautó körüli áramlást tanulmányozunk, de szélcsatornánk nincs, csak olyan vízcsatornánk, amely mérőterében legfeljebb 10m/s vízsebesség állítható be. Kapunk egy, a valós



személyautóhoz geometriailag hasonló,  $M=1:5$  méretarányban lekicsinyített modellt. A Reynolds-szám azonosság, mint hasonlósági feltétel betartása során a jellemző sebességnek a megfúvási sebességet, a jellemző hosszléptéknek pedig az  $l_0 = \sqrt{A_{ref}}$  összefüggéssel számítható értéket vehetjük. Itt  $A_{ref}$  az autó haladási irányra merőleges vetület keresztmetszete. A valós autóra  $A_{ref} = 2\text{m}^2$ .

#### ADATOK:

Jel	mértékegység	VALÓS	MODELL (M=1:5)
$A_{ref}$	$\text{m}^2$	2	$2 \cdot M^2 = 0,08$
$l_0 = \sqrt{A_{ref}}$	m	$\sqrt{2}$	$\sqrt{0,08} = \sqrt{2}/5$
	<b>közeg</b>	<b>LEVEGŐ</b>	<b>VÍZ</b>
$\rho$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	1,15	1000
$v$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$16,8 \cdot 10^{-6}$	$8,01 \cdot 10^{-7}$
$\mu$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	$1,932 \cdot 10^{-5}$	$8,01 \cdot 10^{-4}$
$t_0$	$^{\circ}\text{C}$	32	30
R	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	287	-

**KÉRDÉS:** Legfeljebb mekkora valós haladási sebességű autó körüli áramlás vizsgálható ebben a vízcsatornában ezzel a modellel? (Válaszát számítással indokolja!)



## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk



### MEGOLDÁS

Az autómodell körüli áramlásban a tehetetlenségi és a súrlódó erők dominálnak, így a Reynolds-szám azonosság a hasonlósági feltétel a levegőbeli valós („V”: valós) és a vízbéli modell („M” modell) áramlás között.

Reynolds-szám:

$$\text{Re} = \frac{v_0 l_0}{\nu}$$

$$\text{Re}_{\text{valós}} = \text{Re}_{\text{modell}}$$

$$\frac{v_{0,\text{valós}} \cdot l_{0,\text{valós}}}{\nu_{\text{valós}}} = \frac{v_{0,\text{modell}} \cdot l_{0,\text{modell}}}{\nu_{\text{modell}}}$$

Az 1:5 méretarány esetén a jellemző hosszlépték eltérő, így ha  $v_{0,\text{modell}} = 10 \text{ m/s}$  lehet, akkor a vizsgálható max. való sebesség rendezve fentit adódik:

$$v_{0,\text{valós}} = v_{0,\text{modell}} \cdot \frac{\nu_{\text{valós}}}{\nu_{\text{modell}}} \cdot \frac{l_{0,\text{modell}}}{l_{0,\text{valós}}} = 10 \cdot \frac{16,8 \cdot 10^{-6}}{8,01 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1}{5} = 41,95 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (kb. } 151 \text{ km/h)}$$







## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

### X.PÉLDA (áramlásba helyezett testekre ható erő)

Egy  $D=42,7\text{mm}$  átmérőjű valós golfabda felnagyított, 10:1 méretarányú modelljére vonatkozó aerodinamikai méréseket végzünk szélcsatornában. A nyugvó levegőben az éppen  $180\text{km/h}$  sebességgel mozgó valós golfabda körüli valós áramláshoz hasonló áramlási körülményeket kell biztosítanunk a szélcsatorna modellmérésen. A golfabda-modell mért ellenállástényezője  $c_e=0,2$ . A golfabda körüli áramlásra a jellemző hosszlépték ( $l_0$ ) mindig a labda átmérője (valós és modell esetben is). **ADATOK:**



ADATOK		VALÓS	MODELL
Megnevezés	mértékegység		
közeg		levegő	levegő
sűrűség ( $\rho$ )	$\text{kg/m}^3$	1,2	1,2
hőmérséklet (t)	$^\circ\text{C}$	25	25
viszkozitás ( $\nu$ )	$\text{m/s}^2$	$15,5 \cdot 10^{-6}$	$15,5 \cdot 10^{-6}$
megfúvási jell. sebesség ( $v_0$ )	$\text{km/h}$	180	?
térerősségvektor ( $g$ )	$\text{N/kg}$	9,81	9,81
ellenállástényező ( $c_e$ )	1	0,2	0,2

### KÉRDÉSEK:

- A) Indokolja, hogy a mérés során mely hasonlósági szám azonosságát kell biztosítani!
- B) Mekkora megfúvási sebességet kell beállítani a szélcsatornában? Válaszát számítással indokolja!
- C) Számítsa ki a szélcsatorna mérés esetére a kézre ható  $F_e$  ellenálláserőt ( $F_e=?[\text{N}]$ ) és aerodinamikai veszteségteljesítményt ( $P_{ae}=?[\text{W}]$ )!



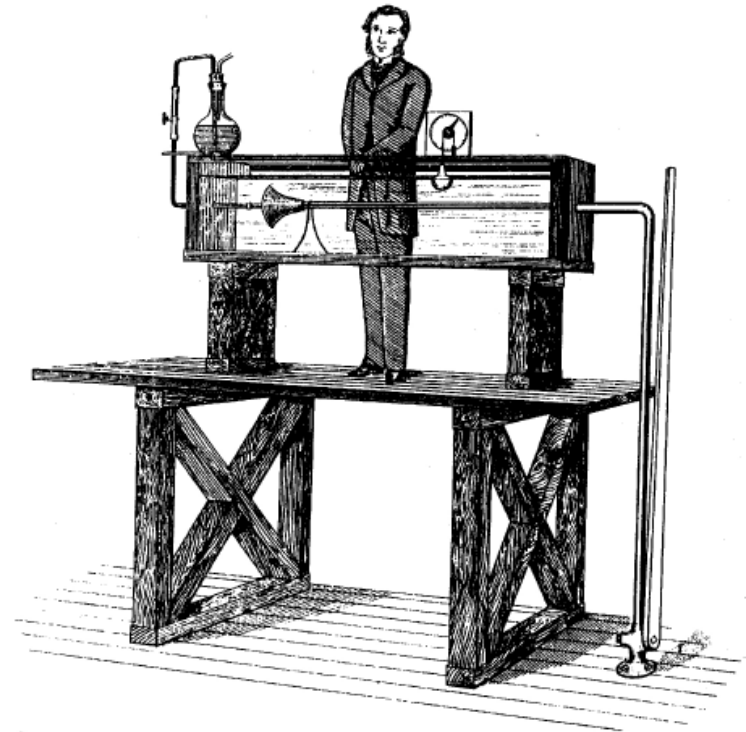


# 8. Súrlódásos közegek áramlása

Köszönöm a figyelmet!

Áramlástan előadást kiegészítő prezentáció  
Dr. Suda Jenő Miklós, adjunktus  
BME Áramlástan Tanszék

Felhasznált szakirodalom:  
Dr. Lajos T.: Az áramlástan alapjai tankönyv  
Dr. Balogh M.: Turbulencia modellezése előadásjegyzet  
Dr. Suda J.M.: Járműáramlástan előadásjegyzet



A Reynolds-féle kísérlet

