

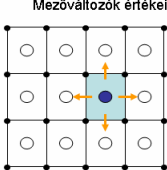
Az áramlási szimuláció módszerei

- A három legelterjedtebb módszer család:
 - Véges differenciák módszere;
 - Véges elem módszer;
 - Véges térfogatok módszerek;**
- Néhány kevésbé elterjedt módszer:
 - Spektrál módszerek;
 - Rács nélküli módszerek;
 - Rács-gáz módszerek.
- A véges térfogat módszer (hasonlóan a véges elem módszerhez) a számítási tartomány kisebb térfogati elemekre bontja, amelyekben belül a keresett áramlási mezőváltozók egyszerűbb (pl. lineáris) függvényekkel közelíthetők.
- A tartomány felbontását **hálógenerálásnak**, a térfogatelemeket pedig **celláknak** hívjuk. Mezőváltozóink diszkrét értékeit a cellák középpontjában szeretnénk meghatározni.
- Célunk az áramlást leíró megmaradási egyenletek megoldása közelítő módszerrel.

- Sorolja fel az áramlások numerikus szimulációjára leggyakrabban alkalmazott 3 módszert.
- Mit értünk hálógenerálásról és mik a cellák?

Véges térfogatok módszere

Mezőváltozók értékei



U: valamilyen megmaradó mennyiség térfogati sűrűsége

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V S_V dV + \oint_A \vec{S}_A \cdot d\vec{A}$$

A megmaradó mennyiség egységnyi tömegre vonatkoztatva:

$$\Phi = U / \rho$$

Konvektív és konduktív fluxusok:

$$\vec{F}_c = \rho \Phi \vec{v} \quad \vec{F}_d = -\Gamma \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \Phi dV + \oint_A \rho \Phi \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint_A (\Gamma \nabla \Phi + \vec{S}_A) \cdot d\vec{A} + \int_V S_V dV$$

- Írja fel az általános transzportegyenlet integrál alakban!
- Definiálja a konvektív és konduktív fluxus fogalmát!

Az általános transzportegyenlet differenciál alakban:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{S}_A + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_V$$

Egykomponensű folyadék áramlását leíró transzportegyenletek konzervatív alakja:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + \rho g_x + S_u$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + \rho g_y + S_v$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\mu \nabla w) + \rho g_z + S_w$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{v}) = \nabla \cdot (-p \vec{v} + \underline{\tau} \cdot \vec{v}) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_e$$

Egyenlet:	ϕ
kontinuitás	1
x-impulzus	u
y-impulzus	v
z-impulzus	w
fajlagos energia	e

- Írja fel az általános transzportegyenlet differenciál alakban! Milyen mennyiségeket képviselhet a Φ transzportált skaláris jellemző?
- Írja fel a kontinuitás, a mozgásegyenlet és az energiaegyenlet konzervatív alakját! Milyen tagnak tekinthetők a viszkozus erők

és milyennek a nyomásgradiens az általános transzportegyenletben?



Véges térfogatok módszere

- Az alapegyenletek előbbi alakjait **konzervatív** (megmaradási) **alaknak** hívjuk.
- A differenciál-egyenleteinket **integrálva egy-egy cella térfogatra** minden divergenciás tag a cella összes részfelületére vonatkozó felületi integrál alakul. Az integrálok értéke minden cellafelületre egy-egy skalár, ami az adott felületen egységnyi idő alatt áramló megmaradó mennyiséget fejezi ki, ezek a felület két oldalán tartott (ismeretlen) mezőváltozóktól függenek.
- Minden transzportegyenlet, minden cellára egy-egy nemlineáris algebrai egyenletet eredményez**, ezt nevezzük a leíró egyenletek **diszkrét közelítésének**. Tipikus példaként: 5 transzportegyenlet és 1 000 000 cella esetén 5 000 000 db. algebrai egyenletből álló egyenletrendszert kapunk.
- Az algebrai egyenletrendszer érdekes tulajdonsága, hogy az egyenletekben **egy-egy cella mezőváltozóit csak a szomszédos cella mezőváltozóival állnak kapcsolatban**.
- A sok ismeretlen és az egyenletek nemlinearitása miatt az algebrai egyenletrendszer pontos megoldása nem lehetséges, **iteratív közelítő eljárásokat** alkalmazunk. Azt szeretnénk, hogy a megoldás valamilyen **iniciális** (kezdési) állapotból indulva lépésenként **konvergáljon** a diszkrét egyenletrendszer pontos megoldásához. (Legtöbbször meg is teszi.)
- A számítási tartomány határára eső cella-részfelületekre vonatkozó integrálok számításához az elhagyott térrész hatását leíró újabb összefüggések **peremfeltételek** megadása szükséges.

- Milyen alakú alapegyenletekből indulunk ki a véges térfogatok módszerének alkalmazásakor?
- Mit értünk a véges térfogatok módszerének konzervatív tulajdonságán?
- Hogyan nyerünk algebrai egyenletrendszert az áramlást leíró parciális differenciálegyenletekből?
- Milyen pontokban értelmezzük a mezőváltozókat? Hogyan állnak egymással kapcsolatban?
- Mit értünk iteratív megoldási módszeren?
- Mit értünk egy iteratív módszer konvergenciája alatt?
- Hogyan értelmezhetők a peremfeltételek a véges térfogat módszer esetében?

A CFD elemzés folyamata

- Geometriai modell előállítás
- Hálógenerálás
- Peremfeltételek zónák kijelölése
- Fizikai modell kiválasztása, anyagjellemzők megadása
- Peremfeltételek számértékei
- Numerikus paraméterek
- Megoldás inicializálása
- Iteráció
- Eredmények értékelése

előfeldolgozás
GAMBIT-ben
*.dbs, → *.msh

megoldás
FLUENT-ben
*.cas, *.dat

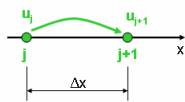
utófeldolgozás
FLUENT-ben

Ezt a folyamatot fogjuk most végigkövetni a „mérőperem” számítási gyakorlaton keresztül

- Sorolja fel az áramlási elemzés lépéseit! Mit nevezünk előfeldolgozásnak, megoldásnak és utófeldolgozásnak?

Differenciasémák levezetése Taylor-sorokkal

Kristóf Gergely
2008. 11. 18.



Euler-módszer

Az (analitikus) megoldás Taylor-sora j pontból a j+1 pontba.
Elsőrendű pontosságú integrálási séma:

$$u_{j+1} = u_j + u'_j \Delta x + o(\Delta x)$$

Differenciaséma, szintén elsőrendű pontossággal:

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + o(1)$$

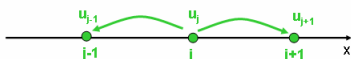
Szintén elsőrendű integrálási séma:

$$u_j = u_{j+1} + u'_{j+1}(-\Delta x) + o(\Delta x)$$

Általában u_{j+1} az u_{j+1} függvényében adott, így a fenti egyenletből egy bonyolultabb képlettel fejezhető ki u_{j+1} . Ilyen esetben ezt **implicit** sémának nevezzük.

- Mutasson példát egy elsőrendű pontosságú integrálási és differenciálási sémára!
- Mit értünk implicit séma alatt?

CDS



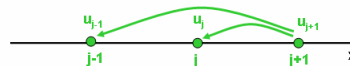
$$u_{j+1} = u_j + u'_j \Delta x + u''_j \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1} = u_j + u'_j(-\Delta x) + u''_j \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x)$$

- Vezesse le a CDS sémát Taylor-sorokkal! Határozza meg a konvergencia rendjét!

Egy implicit, másodrendű differenciaséma



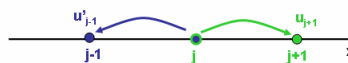
$$u_j = u_{j+1} + u'_{j+1}(-\Delta x) + u''_{j+1} \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u_{j-1} = u_{j+1} + u'_{j+1}(-2\Delta x) + u''_{j+1} 2\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

$$u_j - \frac{u_{j-1}}{4} = \frac{3}{4}u_{j+1} + u'_{j+1} \left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j+1} = \frac{\frac{3}{2}u_{j+1} - 2u_j + \frac{1}{2}u_{j-1}}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

Adams-Basforth séma



$$u_{j+1} = u_j + u'_j \Delta x + u''_j \frac{\Delta x^2}{2} + o(\Delta x^2)$$

$$u'_{j-1} = u'_j + u''_j(-\Delta x) + o(\Delta x) \quad \Bigg/ \quad + \dots \times \frac{\Delta x}{2}$$

$$u_{j+1} = u_j + \frac{3}{2}u'_j \Delta x - \frac{1}{2}u'_{j-1} \Delta x + o(\Delta x^2)$$

Másodrendű pontosságú explicit integrálási séma.
Alkalmos a **NS egyenlet időbeli integrálására**.

A térbeli deriváltakról általában:
Nem egyenközi és nem koordináta irányú rácsokra nagyon komplikált sémák adódnak.
A transzportegyenletekben végül is csak **div**, **grad** és **Laplace** operátorok kelljenek.

- Vezesse le az Adams-Basforth sémát! Adjon egy alkalmazási példát!

A divergencia közelítő alakja

Véges térfogatos módszere esetében a divergencia operátort felületi integrálásra visszavezetve közelítjük, ezért a Gauss-tételből kell kiindulni:

$$\int_V \nabla \cdot u \, dV = \int_A u \cdot dA$$

Az u vektor Descartes koordinátáit u_i -vel jelölve az alábbi módon definiálhatjuk a divergencia operátor diszkrét alakját a P középpontú cella középpontjában:

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i = \frac{\sum_k \int_{A_k} u_{1k} \, dA}{V_P}$$

ahol A_k a cella oldalainak indexe.

- Hogyan közelíthető a divergencia operátor véges térfogatok módszerével?

A gradiens közelítő alakja

Egy skaláris mennyiség gradiensét a Gauss-tételből levezetett alábbi integrál átalakító tételből határozhatjuk meg:

$$\int_V \nabla \phi \, dV = \int_A \phi \cdot d\mathbf{A}$$

A gradiens operátor i komponensét tehát az alábbi alakban számolhatjuk:

$$\tilde{\nabla}_i \phi = \frac{\sum_k \int \phi \, dA_k}{V_P}$$

A_i a felületvektor i komponensét jelöli Descartes koordináta-rendszerben.

- Hogyan közelíthető a gradiens operátor véges térfogatok módszerével?

A Laplace-operátor közelítő alakja

Egy skaláris mennyiségre vonatkozó Laplace operátor felírható a gradiens divergenciájaként:

$$\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi$$

Diszkrét közelítés elvégzéséhez a belső gradiensét a cella felületére interpolálnunk kell. Jelöljük ezt <> zárójelekkel:

$$\tilde{\Delta} \phi = \tilde{\nabla} \cdot \langle \tilde{\nabla}_i \phi \rangle$$

Gyakorlatilag a nyomás kivételével (pl. hőmérséklet vagy transzportált passzív skalárok esetében) a gradiens felületre merőleges komponensét egyszerűen is közelíthetjük.

Végül is a Laplace operátor közelítő alakja a P pontban és a szomszédos cellákban tárolt ϕ értékek lineáris kombinációja lesz:

$$\tilde{\Delta} \phi = A_P \phi_P + \sum A_e \phi_e$$

Az A együtthatók értékét a fent leírt módon határozhatjuk meg.

- Hogyan közelíthető a Laplace operátor véges térfogatok módszerével?

Diszkrétizáció véges térfogatok módszerével

Kristóf Gergely
2008.11.13.

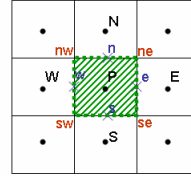
Fluxusok és térfogati források

A transzportegyenlet egy ϕ skaláris mezőváltozóra stacionárius áramlás esetén:

$$\int_A \rho \phi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_A T \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} + \int_V q_\phi \, dV$$

konvektív fluxus konduktív fluxus

Egy 2D háló nevezetes pontjai P pont környezetében (kompsz indexelés):



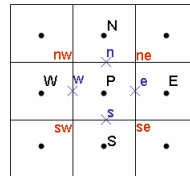
Felületi integrálok?
Térfogati integrálok?

Integrálok numerikus közelítése

Fluxusok felületi integrálja az e felületen:

$$F_e = \int_A \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} = \langle f_{\perp} \rangle_e A_e \cong f_{e\perp} A_e$$

2-od rendű pontosságot biztosít ...



$$F_e \cong A_e \frac{1}{2} (f_{ne} + f_{se})_{\perp}$$

2-od rendű (trapéz szabály)

$$F_e \cong \frac{A_e}{6} (f_{ne} + 4f_e + f_{se})_{\perp}$$

4-ed rendű (Simpson-szabály)

A térfogati forrás integrálja a P cellára:

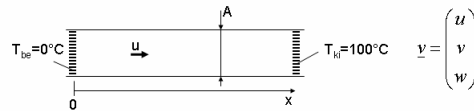
$$Q_P \cong \int_V q_\phi \, dV \cong q_{\phi,P} V_P$$

PI. FLUENT rendszerben a mennyiségeket a cellaközéppontokban tároljuk. Más pontokba a értékét interpolálni kell.

- Hogyan közelíthető egy vektormennyiség felületi integrálja egy cella határfelületén?
- Hogyan közelíthető egy skaláris jellemző térfogati integrálja egy numerikus cellára?

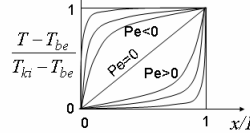
1D példa

Stacionárius áramlás egyenes csőben, hővezetési feladat:



Kontinuitás: $\frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \rightarrow u = \text{állandó}$

Energiaegyenlet: $\int_A [c_p T + \frac{v^2}{2}] \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \lambda \nabla T \cdot d\mathbf{A}$



Az analitikus megoldás:

$$\frac{T - T_{be}}{T_{ki} - T_{be}} = \frac{e^{\rho u x c_p / \lambda} - 1}{e^{\rho u L c_p / \lambda} - 1}$$

Pe (Peclet-szám)

- Írja fel az energiaegyenlet integrál alakját stacionárius, egydimenziós, állandó sűrűségű áramlásban zajló konduktív-konvektív hővezetési feladatra!
- Rajzolja fel a stacionárius konduktív-konvektív hővezetési feladat analitikus megoldását jellegre helyesen!
- Mit nevezünk Peclet-számnak?

Diszkrétizálás

Felírjuk a fluxusok felületi integráljait:

$$(\rho u T)_e A - (\rho u T)_w A = \left(\frac{\lambda}{c_v} \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e A - \left(\frac{\lambda}{c_v} \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w A$$

Új jelölések: $C_e = C_w = \rho u$ $D_e = D_w = \frac{\lambda}{c_v \Delta x}$

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e (T_E - T_P) - D_w (T_P - T_W)$$

Ugyanez még egyszerűbben: $F_e - F_w = 0$

ahol: $F_e = C_e T_e - D_e (T_E - T_P)$ a teljes fluxus.

- Diszkrétizálja az energiaegyenletet 1D, $\rho = \text{állandó}$, stacionárius hővezetési feladat esetére véges térfogatok módszerével!

CDS séma

$$C_e T_e - C_w T_w = D_e (T_E - T_P) - D_w (T_P - T_W)$$

A face-hőmérsékleteket lineárisan interpoláljuk:

$$\left[\frac{C_e}{2} (T_P + T_E) - D_e (T_E - T_P) \right] - \left[\frac{C_w}{2} (T_W + T_P) - D_w (T_P - T_W) \right] = 0$$

Felírjuk a P cellára vonatkozó lineáris egyenletet:

$$A_P T_P = A_W T_W + A_E T_E$$

A_W	A_E	A_P
$D_w + C_w / 2$	$D_e - C_e / 2$	$A_W + A_E$
$D_e + D_w + C_e / 2 - C_w / 2 = A_E + A_W + C_e - C_w$	kontinuitás = 0	

Súlyozott átlagnak is tekinthető. Ha az együtthatók pozitívak, akkor az átlagolás nem vezethet be extrémumot P pontban.

- Diszkrétizálja a teljes hőfluxust CDS séma segítségével, írja fel a P középpontú cellára kapott algebrai egyenletrendszert! Hogyan kell kiszámítani az A_P együtthatót?

Az algebrai egyenletrendszer megoldása

Pl. 4 cella esetén az alábbi:

$$\begin{bmatrix} A_{1,P} & A_{1,E} & 0 & 0 \\ A_{2,W} & A_{2,P} & A_{2,E} & 0 \\ 0 & A_{3,W} & A_{3,P} & A_{3,E} \\ 0 & 0 & A_{4,W} & A_{4,P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,P} \\ T_{2,P} \\ T_{3,P} \\ T_{4,P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{1,W} T_{be} \\ 0 \\ 0 \\ -A_{4,E} T_{ki} \end{bmatrix}$$

Megoldás: Gauss-eliminációval.
n ismeretlenes, tridiagonál mátrixú egyenletrendszer esetében csak 2 n művelet (egy ciklus előre és egy vissza): Thomas-algoritmus.

Sajnos 2D és 3D áramlások esetében nem tridiagonál mátrixú.

- Írja fel az 1D, $\rho = \text{állandó}$, stacionárius hővezetési feladat diszkrétizálásából adódó egyenletrendszer mátrixos alakját. Milyen módszerrel oldható meg ez az egyenletrendszer?

Példaprogram

- Hasonló megoldást kapunk több, különböző paraméter változatra. $Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$
- Hiba N^2 -el arányosan csökken. Másodrendű pontosság. $Re = \frac{\rho u L}{\mu}$
- Néha oszcillál. Mikor kezd oszcillálni? $Pe_{\Delta x} = \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v} > 2$

- Mi a CDS séma stabilitásának feltétele egy 1D, $\rho = \text{állandó}$, stacionárius hővezetési feladat megoldása során?

Transzportivitás

Fizikai szempontból: növekvő Pe esetén egyre T_E hatása egyre kevésbé érvényesül T_P -re.

Tudja ezt a numerikus séma?

$$A_E = D_e - C_e / 2$$

$$C_e = \rho u \quad D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \quad Pe = \frac{\rho u L}{\lambda / c_v}$$

$$A_E = \frac{D_e}{2} \left(2 - \frac{C_e}{D_e} \right) = \frac{D_e}{2} \left(2 - \frac{\rho u \Delta x}{\lambda / c_v} \right) = \frac{D_e}{2} (2 - Pe_{\Delta x})$$

Cella Peclet-szám: a konvektív és konduktív hőfluxusok hányadosa.
 $Pe_{\Delta x} > 2$ esetén A_E nagysága újra nőni kezd.
A stabilitási probléma is ilyen esetekben lép fel.

- Mit értünk a numerikus fluxusok transzportivitásán?

UDS séma

\cdot	w	\cdot	e	\cdot
W	w	P	e	E

$u \geq 0$ esetén: $T_w = T_W, \quad T_e = T_P$
 $u < 0$ esetén: $T_w = T_P, \quad T_e = T_E$

$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

A_W	A_E	A_P
$Max(C_w, 0) + D_w$	$Max(-C_e, 0) + D_e$	$A_W + A_E$

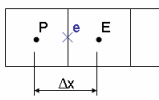
További numerikus kísérletek...

A pontosság elsőrendűre csökken.

- Ismeresse az elsőrendű szélfelőli súlyozást (UDS) egy 1D, $\rho = \text{állandó}$, stacionárius hővezetési feladat példáján! Teljesül-e a transzportivitás?

Mesterséges „diffúzió”

A numerikus hibának egy fontos fajtája. A pontatlan interpolációból adódott:



$$T_e = T_P + \frac{\Delta x}{2} \frac{dT}{dx} + o(\Delta x)$$

ezt elhagyjuk

$$F_e = C_e T_P + C_e \frac{\Delta x}{2} \frac{dT}{dx} - D_e (T_E - T_P)$$

Olyan mintha megnöveltük volna a hővezetést!
Írjuk be T deriváltjának diszkrét közelítését:

$$D_e = \frac{\lambda}{c_v \Delta x} \rightarrow \frac{\lambda_{mest}}{c_v \Delta x} = \frac{\rho u}{2} \rightarrow \lambda_{mest} = \frac{\rho u c_v \Delta x}{2}$$

- Határozza meg az UDS séma által bevezetett mesterséges vezetési tényezőt!

HDS séma Spalding (1972)

Az a fontos, hogy az „A” együtthatók ne legyenek negatívak.
Pe_{Δx} értéke alapján számoljuk a felületi fluxust:

$$Pe_{\Delta x} \leq -2 \quad F_e = C_e T_E$$

$$-2 < Pe_{\Delta x} \leq 2 \quad F_e = C_e \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_{\Delta x}} \right) T_P + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_{\Delta x}} \right) T_E \right]$$

$$2 < Pe_{\Delta x} \quad F_e = C_e T_P \quad \text{Legalább kis } Pe_{\Delta x} \text{ esetén másodrendű.}$$

$$A_W T_W + A_E T_E = A_P T_P$$

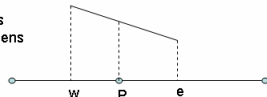
A_W	A_E	A_P
$Max \left(C_w, \left[D_w + \frac{C_w}{2} \right], 0 \right)$	$Max \left(-C_e, \left[D_e - \frac{C_e}{2} \right], 0 \right)$	$A_W + A_E$

- Ismertesse a Spalding-féle hibrid differenciaséma (HDS) elvét!

SOU séma

másodrendű szélfelületi súlyozás

Cellán belüli lineáris interpoláció a gradiens segítségével:



$$T_e = T_p + \frac{dT}{dx} \Big|_p \frac{\Delta x}{2}$$

A gradiens meghatározása két lépésben:

1. lépés $\frac{dT}{dx} \Big|_p = \frac{T_e' - T_w'}{\Delta x} \quad T_e' = \frac{T_p + T_E}{2}, \quad T_w' = \frac{T_W + T_P}{2}$

2. lépés $\frac{dT}{dx} \Big|_p$ értékét úgy korlátozzuk, hogy ne vezelhessen be extrémumokat. Gradiens limiterek: C Hirsch.

- Ismertesse a másodrendű szélfelületi súlyozás (SOU) elvét!

Inkompresszibilis áramlások számítása

Kristóf Gergely

2008. november 15.

A nyomás-sebesség kapcsolat problémája

A diszkretizációval kapott algebrai egyenletrendszer megoldására iterációs módszert fogunk alkalmazni.

Egy további egyszerűsítési lehetőség:

Szegregált iteráció: minden mezőváltozóra különálló egyenletrendszert oldunk meg, amelyben a többi mezőváltozót állandónak tekintjük.

Kontinuitás: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Navier-Stokes egyenlet: $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu \nabla u) + g_x$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\nu \nabla v) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\nu \nabla w) + g_z$$

Ez az egyenletrendszer nem alkalmas szegregált iterációra. Szükségünk lenne a nyomásmező meghatározására alkalmas alapegyenletre.

- Írja fel az állandó sűrűségű lamináris áramlást leíró alapegyenleteket konzervatív alakban!
- Mit értünk szegregált iteráció alatt? Alkalmas ez az egyenletrendszer szegregált iterációval történő megoldásra?

Két szokásos megközelítés

Ψ-ω módszer

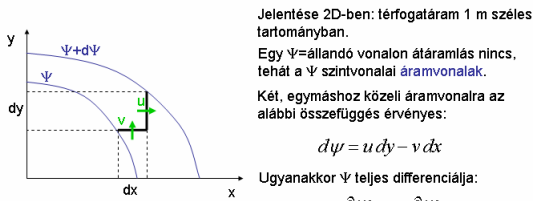
Az mozgásgyenlethez kiküszöböljük a nyomásmezőt. A kontinuitást egy potenciál függvény bevezetésével oldjuk meg.

Nyomáskorrekciós módszerek

A kontinuitási egyenlet helyett a nyomásmező meghatározására alkalmas alapegyenletet oldunk meg.

- Nevezzen meg két szokásos módszert a nyomás-sebesség kapcsolat feloldására. Egy-egy mondatban ismertesse ezek működési elvét!

Az áramfüggvény (Ψ)



Jelentése 2D-ben: térfogatáram 1 m széles tartományban.

Egy Ψ=állandó vonalon átáramlás nincs, tehát a Ψ szintvonalai **áramvonalak**.

Két, egymáshoz közeli áramvonalra az alábbi összefüggés érvényes:

$$d\psi = u dy - v dx$$

Ugyanakkor Ψ teljes differenciálja:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

Ebből megkapjuk Ψ definícióját 2D áramlás esetére:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \text{és} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

Pusztán léteivel kielégíti a kontinuitási egyenletet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

- Vezesse le az áramfüggvény definíciós összefüggéseit 2D, állandó sűrűségű áramlás esetén.
- Bizonyítsa be, hogy az áramfüggvény kielégíti a kontinuitási egyenlet 2D-ben!

3D áramlások esetében

3D-ben Ψ-t vektorként definiáljuk: $\underline{v} = \nabla \times \underline{\psi}$
Vektorpotenciál.

Sikáramlás esetén visszkapjuk az eredeti definíciót:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \end{pmatrix} \rightarrow \text{azaz sikáramlás esetén: } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{és} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

A kontinuitás 3D-ben is automatikusan kielégül: $\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\psi} = 0$

2D-ben további előny, hogy a mezőváltozók száma csökken (u,v → Ψ). Sajnos ez az előny 3D-ben elvész.

- Ismertesse az áramfüggvény általános definícióját és mutassa meg, hogy kielégíti a kontinuitási egyenlet!

Az örvényesség (ω)

Az örvényesség 3D-ben: $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v}$

2D-ben ω-nak csak z komponense van:

tehát:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Az áramfüggvénnyel kifejezve:

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ez egy **Poisson-egyenlet az áramfüggvényre.**

Egy érdekes speciális eset: potenciális áramlásokra

$$\underline{\omega} = 0$$

Csak egy Laplace-egyenletet kell megoldani 2D esetben.

$$\Delta \psi = 0$$

Analitikus megoldások, analógiák...

- Definiálja az örvényességet (ω-t)!
- Ismertesse az áramfüggvény meghatározására alkalmas Poisson-egyenletet 2D áramlás esetén!
- Milyen egyenletről számíthatjuk az áramfüggvényt állandó sűrűségű potenciális áramlások esetén?

Az örvénytranszportegyenlet (ÖTE)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját 2D-ben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \dots = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \dots = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \dots = 0 + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + (\nabla \cdot \underline{v}) \omega = 0$$

Az örvénytranszport egyenlet 2D alakja. (3D-ben bonyolultabb).

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega$$

A kinematikai viszkozitás az örvényesség vezérlési tényezője... Pl: halárrétegben.

- Vezesse le az örvénytranszportegyenlet 2D alakját!

Megoldási módszer stacionárius áramlásra

Poisson-egyenlet Ψ-re:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

ÖTE-ba beírjuk a Ψ-vel kifejezett u-t és v-t:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

Szegregált megoldási módszer:

$$\psi^0, \omega^0 \xrightarrow{\text{Poisson}} \psi^1, \omega^0 \xrightarrow{\text{ÖTE}} \psi^1, \omega^1 \xrightarrow{\text{Poisson}} \psi^2, \omega^1 \dots$$

Peremfeltételek Ψ-re:

- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

ω-ra:

- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

Probléma: nyomás peremfeltételt nem tudunk előírni, mert p nem szerepel az egyenletekben. A nyomásmezőt utólag kell meghatározni.

- Írja fel a ψ-ω módszer alapegyenleteit 2D áramlás esetén és mutassa be a szegregált megoldási módszer alkalmazását erre az esetre!
- Milyen peremfeltételeket írhatunk elő ψ-re és ω-ra ki és belépésnél.
- Milyen peremfeltételeket írhatunk elő ψ-re a falakon?
- Előírható-e nyomás peremfeltétel ψ-ω módszer esetében?

Nyomás alapú megoldók

A nyomásegyenlet

$$\text{Kontinuitás: } \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$\text{Mozgásegyenlet 2D-ben, } g=0 \text{ esetén: } \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u} \otimes \underline{u}) = -\nabla(p/\rho_0) + \nu \Delta \underline{u}$$

Új jelölések: $P = p/\rho_0$ és \underline{f} (értelemszerűen).

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{f} - \nabla P$$

Képezzük a mozgásegyenlet divergenciáját felhasználva, hogy: $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{u} = 0$

$$\Delta P = \nabla \cdot \underline{f} \quad \text{Ez egy Poisson-egyenlet P-re. Nyomásegyenlet}$$

Ez alkalmas pl. a nyomásmező meghatározására Ψ-ω módszer esetén.

- Vezesse le a nyomásegyenletet!

Alkalmos-e a nyomásegyenlet a kontinuitás kiváltására?

Diszkrétizáljuk a mozgásegyenletet egyszerűség kedvéért időben elsőrendű pontosságú integrálási sémával (Euler-módszerrel):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (f_i^n - \tilde{\nabla}_i P^n)$$

A nyomásegyenlet diszkrét alakja:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n$$

Először oldjuk meg a nyomásegyenletet P^n -re, majd frissítjük a sebességet!

Divergenciamentes lesz az új sebességmező?

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \Delta t (\underbrace{\tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n}_{\approx 0 \text{ csak közelítőleg tudjuk megoldani!}})$$

A nyomásegyenlet megoldásának hibája felhalmozódva jelentkezik a kontinuitásban.

- Mutassa meg, hogyan halmozódnának a numerikus hibák, ha a nyomásegyenletet eredeti formájában alkalmaznánk a kontinuitási egyenlet helyettesítésére!

A hiba felhalmozódása elkerülhető...

Nekünk nem a nyomásegyenlet fontos, hanem a kontinuitás teljesítése.

Az eredeti nyomásegyenlet helyett az alábbi korrigált egyenletet kell megoldani:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n + \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n$$

majd a mozgásegyenletből számoljuk az új sebességeket:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (f_i^n - \tilde{\nabla}_i P^n)$$

Ellenőrizzük az új sebesség divergenciamentesességét:

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \left[\underbrace{\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n}_{\approx 0 \text{ nyomásegyenlet}} \right]$$

Csak akkora a kontinuitás hibája, amit a korrigált nyomásegyenlet megoldásakor elkövetünk az n -edik lépésben.

- Hogyan kerülhető el a hiba felhalmozódása a kontinuitási egyenletben nyomás alapú megoldók esetében?

Projekciós módszer

Ugyanez a módszer a szokásosabb jelölésekkel:

1. lépés kiszámítjuk: $u_i^* = u_i^n + \Delta t f_i^n$ u^* pszeudosebesség

2. lépés megoldjuk: $\tilde{\Delta} P^n = \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^* \rightarrow P^n$

3. lépés kiszámítjuk: $u_i^{n+1} = u_i^* - \Delta t \tilde{\nabla}_i P^n$

Ellenőrizzük! $\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \left[\underbrace{\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^* - \tilde{\Delta} P^n}_{\text{Tényleg ezt oldjuk meg a 2. lépésben.}}$

- Ismertesse a projekciós módszerek működési elvét!

Stacionárius áramlás

Kis időlépések:

Az előző módszer csak kis időlépekkel tud működni. (Feltételesen stabil séma.)

Ha az áramlás stacionárius, vagy lassan változik, akkor nagyon sok időlépést kell tenni, amíg eljutunk a stacionárius állapotot.

Hiányzik az időbeli derivált:

Stacionárius áramlások esetén kihagyjuk az időbeli deriváltakat és a hely szerinti deriváltakból számoljuk ki az új sebességmezőt.

P-u iteráció stacionárius áramlásra

Szeretnénk, ha az $n+1$ -edik iterációs lépésben minél pontosabban teljesülnének:

$$A_p u_{i,p}^{n+1} + \sum A_\ell u_{i,\ell}^{n+1} = Q_i - \tilde{\nabla}_i P^{n+1} \quad \text{és} \quad \tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = 0$$

Csak a régi nyomást tudjuk felhasználni... (Itt még nem lesz pontos a kontinuitás). u^* kezdőértékeként u^n -et használjuk.

$$A_p u_{i,p}^* + \sum A_\ell u_{i,\ell}^* = Q_i - \tilde{\nabla}_i P^n \quad \rightarrow \text{1. lépés } u_i^*$$

$$u_{i,p}^* = \frac{Q_i - \sum A_\ell u_{i,\ell}^*}{A_p} - \frac{1}{A_p} \tilde{\nabla}_i P^n$$

$$u_{i,p}^* = \tilde{u}_{i,p} - \frac{1}{A_p} \tilde{\nabla}_i P^n$$

u^{n+1} hasonló képlettel közelíthető az új nyomásgradiens alapján:

$$u_{i,p}^{n+1} \approx \tilde{u}_{i,p} - \frac{1}{A_p} \tilde{\nabla}_i P^{n+1} \quad \rightarrow \text{3. lépés}$$

u^{n+1} elégítse ki a kontinuitást!

Képezzük a numerikus divergenciáját:

$$\tilde{\Delta} P^{n+1} = A_p \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}_i \quad \rightarrow \text{2. lépés } P^{n+1}$$

A 3. lépésben elhanyagolt szomszédok miatt most a mozgásegyenlet nem pontos, ezért 1,2,3 lépéseket ismételni kell.

- Ismertesse a nyomás alapú megoldók működési elvét stacionárius áramlás esetén!

Szokásos módszerek

Belső iteráció:

Közelítő megoldást kell alkalmazni az 1. és 2. lépés egyenletrendszerének megoldására, azonban a belső iteráció csak 1 lépést szokott tenni.

Nyomáskorrekciós egyenlet:

Nyomás helyett nyomáskorrekcióra szokásos megoldani a Poisson-egyenletet. (Numerikus előnyök.)

SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLER, PISO

Időfüggő modellek:

Időben változó folyamatok esetén a lokális gyorsulást beletehetjük Q-ba. Időben implicit sémát alkalmazva nagy időlépéseket lehet tenni.

Az áramlási problémák diszkrétizálásával kapott algebrai egyenletrendszer megoldása

Dr. Kristóf Gergely
2008.11.21.

A Poisson-egyenletet minden időlépésnél meg kell oldani...

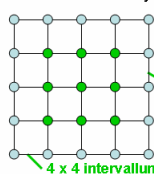
Ezt a feladatot nem tudjuk elkerülni inkompresszibilis áramlások esetén.

Ψ - ω módszer esetében: $\Delta \psi = -\omega \longrightarrow \psi$
 Nyomásalapú megoldók esetében: $\Delta P = \nabla \cdot \underline{f} \longrightarrow P$

- Miért fontos a Poisson-egyenlet hatékony megoldása inkompresszibilis áramlások számítása esetén?

Egyszerű 2D példa

A számítási tartomány:



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = Q$$

Diszkrétizáljuk véges differenciák módszerével:



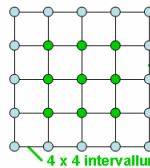
$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} - \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y} \right) = Q_P$$

PI: $\Delta x = \Delta y = h$ esetén: $\phi_S + \phi_W - 4\phi_P + \phi_E + \phi_N = h^2 Q_P$

- Egyszerű 2D példán keresztül mutassa be a Poisson-egyenlet diszkrétizálását!

Mátrixos alakban

$$\phi_S + \phi_W - 4\phi_P + \phi_E + \phi_N = h^2 Q_P$$



9 ismeretlenünk van.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$A_{i,j} \phi_i = Q_i$$

PI. 101 x 101 es háló esetén az ismeretlenek száma $N=10^4$, A elemeinek száma pedig 10^8 .

- Írja fel a 2D Poisson-egyenlet diszkrétizálásával nyert algebrai egyenletrendszert mátrixos alakban!

Gauss-elimináció

Általános mátrix esetében épp olyan jó, mint bármilyen más módszer, viszont a mátrix kedvező tulajdonságait nem használja ki.

1. lépés Elimináció:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

Az első sor $A_{2,1}/A_{1,1}$ -szerezését kivonjuk a második sorból, így ott az első elem 0 lesz. Ugyanez minden további sorra.

Minden további oszlopra az $N-1$ -edik oszlopig.

2. lépés Visszahelyettesítés:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\phi_n = \frac{Q_n}{U_{n,n}}$$

$$\phi_i = \frac{Q_i - \sum_{k=i+1}^N U_{k,i} \phi_k}{U_{i,i}}$$

A műveletigény $N^3/3$, de ebből a visszahelyettesítés csak $N^2/2$.

Hlába ritka A mátrix, az U mátrix már nem ritka. Memóriaigény 101 x 101 es hálón kb. 400 Mb. Továbbá: **Nem is szükséges nagyon pontos megoldás, mert a diszkrétizációs hiba jelentős.**

- Ismertesse a Gauss-féle eliminációs módszer elvét!

Iteratív módszerek

A megoldást lépésenként finomítjuk. ϕ közelítése az n -edik lépésben ϕ^n .

Elhagyva a vektorindexeket: $A \phi^n = Q - \rho^n$ ρ^n : reziduum

A hiba: $\varepsilon^n = \phi - \phi^n$

$A \varepsilon^n = A(\phi - \phi^n) = Q - (Q - \rho^n) = \rho^n$ Tehát a hibára az eredetivel azonos mátrixú egyenletrendszert kell megoldani.

Iteratív módszerek: $M \phi^{n+1} = N \phi^n + Q$

Bekonvergált megoldásra: $\phi^{n+1} = \phi^n = \phi$, ezért: $A = M - N$

Mindkét oldalból vonjunk le $M \phi^n$ -et:

$$M(\phi^{n+1} - \phi^n) = N \phi^n + Q - M \phi^n = Q - A \phi^n = \rho^n$$

korrekció: $\delta^n = M \delta^n = \rho^n$ Korrekciós egyenlet.

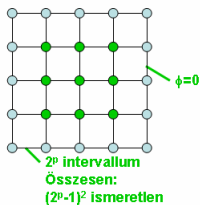
Mivel jobban közelíti M az A mátrixot, annál gyorsabban konvergál. M lehet pl. diagonál, tridiagonál, vagy Δ mátrix. **δ -nak sem kell pontosnak lenni...**

- Ismertesse a lineáris egyenletrendszerek iteratív megoldásának elvét! Mit értünk reziduum, hiba és korrekció alatt? Milyen szempontok merülnek fel az A mátrix M közelítésének megválasztásával kapcsolatban?

Jacobi-iteráció

$$\phi_S^n + \phi_W^n - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^n = h^2 Q_P \quad \text{M diagonál mátrix lesz.}$$

$$\phi_P^{n+1} = \frac{1}{4}(\phi_S^n + \phi_W^n + \phi_E^n + \phi_N^n - h^2 Q_P)$$



Példaprogram:

- A program...
- Az eredmény jellege...
- Szükséges iterációs szám...

- Írja fel a Jacobi iteráció sémáját egyenközű 2D hálón diszkrétizált Poisson-egyenlet megoldására.

Gauss-Seidel iteráció



$$\phi_S^n + \phi_W^{n+1} - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} = h^2 Q_P \quad \text{M } \Delta \text{ mátrix lesz.}$$

ezeket már ismerjük a számítási sorrend miatt (lexikografikus séma)

$$\phi_P^{n+1} = \frac{1}{4}(\phi_S^n + \phi_W^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} - h^2 Q_P)$$

- Fele annyi iterációt igényel
- Nem kell új tömb a változóknak
- A hiba aszimmetrikus.

- Írja fel a Gauss-Seidel-féle iterációs sémáját egyenközű 2D hálón diszkrétizált Poisson-egyenlet megoldására.

Vonalrelaxáció



$$\phi_S^n + \phi_W^{n+1} - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} = h^2 Q_P$$

ezt már ismerjük ezeket egyszerre határozzuk meg Thomas algoritmus segítségével.

Ugyancsak tridiagonál megoldóra épül az ADI (más néven operator splitting) módszer, ami ennél sokkal hatékonyabb megoldást tesz lehetővé.

Probléma:

Az eddigi módszerek csak simítanak, ezért a peremek hatása nagyon lassan terjed be a finom hálókön. → Durvabb rácsokat is használni kell. A korrekciós egyenletet kell durvabb rácsra levinni, mert ezt pontatlanul (nagyobb relatív hibával) is megoldhatjuk.

- Miért nem gazdaságosak a Jacobi, Gauss-Seidel és vonalrelaxációs módszerek finom hálókön?

Multigrid módszer

Vegyük például egy egyszerű egydimenziós feladatot:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = Q$$

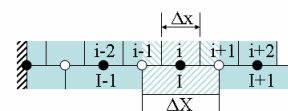
$$\frac{1}{\Delta x^2}(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}) = Q_i$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n) = Q_i - \rho_i^n$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i+1}^n) = \rho_i^n$$

- Vezesse le az 1D Poisson-egyenlet diszkrétizálásából adódó hibaegyenletet. Hogyan lehet kiszámítani a reziduumokat?

Ehagyjuk az iterációs indexet: $\frac{1}{\Delta x^2}(\varepsilon_{i-1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) = \rho_i$



$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{i-2} - \varepsilon_{i-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_i + \varepsilon_{i-1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2} \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{i+2} \right) = \rho_i$$

ezek kiesnek

$$= \frac{1}{2} \rho_{i-1} + \rho_i + \frac{1}{2} \rho_{i+1}$$

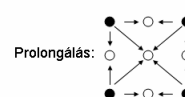
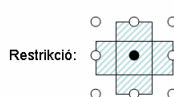
$$\frac{1}{4\Delta x^2}(\varepsilon_{i-2} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+2}) = \frac{1}{4}(\rho_{i-1} + 2\rho_i + \rho_{i+1})$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\delta_{I-2} - 2\delta_I + \delta_{I+2}) = \rho_I$$

restrikciós séma (2D és 3D esetekben közelítő jellegű, ezért jelöljük δ -val.)

- Vezesse le az 1D multigrid módszer esetében alkalmazandó restrikciós sémát! Mutassa meg a durva és a finom rácson diszkrétizált hiba egyenlet kapcsolatát!

Általánosítás 2D esetre:



1. ρ_i restrikciója $\rightarrow \rho_I$
2. δ_I számítása $\frac{1}{4}$ annyi ismeretlen meghatározása (és $\frac{1}{4}$ annyi iteráció). Az időigény szinte elhanyagolható.
3. δ_I prolongálása a finom rácsra (δ_i), majd egy simítás a finom rácson.

Miért ne mennénk le még durvább rácsokra?

1. Reziduumok kiszámítása a legfinomabb rácson
2. Reziduumok restrikciója minden durvább rácsra
3. Egyenletrendszer megoldása a legdurvább rácson
4. Minden finomabb rácsra:
 - Korrekció prolongálása
 - Utósimítás

- Írja fel egy multigrid "V" ciklus lépéseit!

A megoldás műveletigénye

Szükséges iterációk száma 2D-ben:

p	Nsor	N	Jacobi	G-S	Vonalrelax	Multigríd
3	7	49	40	20	10	13
4	16	225	160	80	40	33
5	31	961	640	320	160	59
6	63	3969	2560	1280	640	75
7	127	16129	10240	5120	2560	79

Műveletigény / N:

p	Nsor	N	Jacobi	G-S	Vonalrelax	Multigríd
3	7	49	200	100	50	260
4	16	225	800	400	200	660
5	31	961	3200	1600	800	1180
6	63	3969	12800	6400	3200	1500
7	127	16129	51200	25600	12800	1580

finom háló

- Hogyan nő az iterációk szükséges száma Jacobi, Gauss-Seidel és vonalrelaxációs módszerek esetében és hogyan változik multigríd módszer esetében? Közelítőleg hogyan változik az egy ismeretlen meghatározásához szükséges (szorzási / osztási) műveletek száma?

Kompresszibilis áramlások számítása

Dr. Kristóf Gergely
2008.11.23.

Egyszerű példa

1D izentrópus áramlás állandó keresztmetszetű csőben.
Pl: kompresszorok, kipufogók áramlása.

Kontinuitás:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

Euler-egyenlet:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Izentrópus egyenlet:
$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}$$

p_0 és ρ_0 a referencia állapotra adott állandók. Ismeretlenek p , ρ , u mint x és t függvényei.

- Írja fel az állandó keresztmetszetű csőben történő, egydimenziós, izentrópus gázáramlás alapegyenleteit!

Új mezőváltozót vezetünk be: „a” hangsebesség

Csak egy állapotjelzőt lehet megválasztani. Használjuk állapotjelzőként az „a” hangsebességet és ezzel kiszűrjük ki ρ -t és p -t. Új mezőváltozóink: u és a ; mindkettő m/s dimenziójú.

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \quad a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=\text{állandó}} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{P}{\rho^\gamma} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}$$

$$\ln(P) + \gamma \ln(\rho) = 0 \quad 2 \ln(a) = (\gamma-1) \ln(\rho) + \ln\left(\gamma \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}\right)$$

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad 2 \frac{da}{a} = (\gamma-1) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{da}{dp} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{a}{p} \quad \frac{da}{dp} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho}$$

- Vezesse le a hangsebesség nyomás és sűrűség szerinti deriváltjait izentrópus gázáramlás esetében!

Átalakítjuk az alapegyenleteket

Kontinuitás:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{da}{dp} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{da}{dp} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\gamma-1}{2} \frac{a}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Euler-egyenlet:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{a}{p} = 0$$

$$\frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\gamma-1}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

- Alakítsa át az 1D izentrópus gázáramlás alapegyenleteit m/s dimenziójú mezőváltozókra (u és a).

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\gamma-1}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(a + \frac{\gamma-1}{2} u \right) + (u+a) \frac{\partial}{\partial x} \left(a + \frac{\gamma-1}{2} u \right) = 0$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad C: dx/dt = u+a \text{ irány mentén: } \alpha = \text{állandó.}$$

$$(1) - (2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(a - \frac{\gamma-1}{2} u \right) + (u-a) \frac{\partial}{\partial x} \left(a - \frac{\gamma-1}{2} u \right) = 0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \quad C: dx/dt = u-a \text{ irány mentén: } \beta = \text{állandó.}$$

- Vezesse le a karakterisztikus irányokat és a Riemann-féle invariánsokat!

Karakterisztikák

C, és C. karakterisztikus irányok, α és β Riemann-féle invariánsok.

Ha α és β adottak ... abból a és u meghatározható:

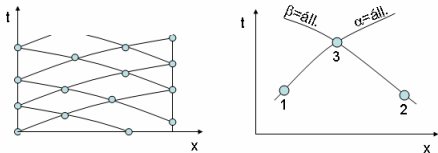
$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a + \frac{\gamma-1}{2} u \\ \beta &= a - \frac{\gamma-1}{2} u \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ u &= \frac{\alpha - \beta}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

a-ból pedig meghatározható a többi állapotjelző:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

- Hogyan lehet meghatározni az elsődleges mezőváltozókat a Riemann-féle invariánsok értékéből 1D izentropikus gázáramlás esetében?

Numerikus megoldás



$$\alpha_3 = \alpha_1 \rightarrow \alpha_3 = \frac{\alpha_3 + \beta_3}{2} \quad u_3 = \frac{\alpha_3 - \beta_3}{\gamma - 1}$$

$$\beta_3 = \beta_2$$

$$x_3 - x_1 = 0.5[(u_3 + \alpha_3) + (u_3 + \alpha_3)](t_3 - t_1) + o(\Delta t^2)$$

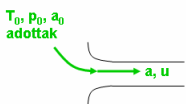
$$x_3 - x_2 = 0.5[(u_3 - \alpha_3) + (u_2 - \alpha_2)](t_3 - t_2) + o(\Delta t^2)$$

t_3, x_3 számítható.

- Ismertesse a karakterisztikák módszerét!

Peremfeltételek

Beáramlás nyitott csővégen:



energiaegyenlet

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} = \frac{a^2}{\gamma R} + \frac{u^2}{2c_p}$$

$$T_0 = \frac{1}{\gamma R} \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2c_p} \left(\frac{\alpha - \beta}{\gamma - 1}\right)^2$$

Vagy α , vagy β már adott a belülről kifelé tartó karakterisztika alapján. A másik Riemann-féle invariáns a fenti egyenletből meghatározható

Kiáramlás:

$$\alpha_0 = a = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

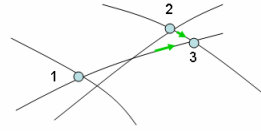
Zárt csővég:

$$u = 0 \rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\gamma - 1} = 0 \rightarrow \alpha = \beta$$

- Hogyan számíthatók az 1D, izentropikus gázáramlás peremfeltételei a karakterisztikák módszerének alkalmazása esetén?

Problémák

- A fizikai folyamattól függően a numerikus háló eldurvulhat.
- Azonos irányba tartó karakterisztikák metszhetnek egymást.



- Milyen numerikus problémák merülnek fel a karakterisztikák módszerének alkalmazásával kapcsolatban?

Véges térfogatok módszerével

Ugyancsak az előbbi csőáramlás példájára alkalmazzuk.

Kontinuitás: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$

Állapotegyenlet:

Mozgásegyenlet: $\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$

$$p = \rho RT$$

Energiaegyenlet: $\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u e + p u)}{\partial x} = 0$

$$e = c_v T + \frac{u^2}{2}$$

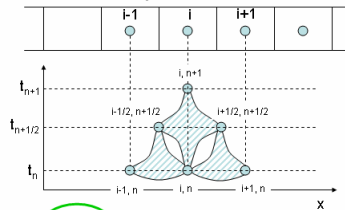
Formális vektorokba rendezhetjük:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \underline{Q}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u e + p u \end{bmatrix} \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Mutassa be az 1D, izentropikus gázáramlást leíró alageyenleteket konzervatív alakban! Írja fel a egyenletrendszert vektoros formában!

Másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszer:



1. lépés

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = \left(U_i^n + U_{i+1}^n \right) / 2 + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = \frac{Q_i^n + Q_{i+1}^n}{2}$$

U ismeretében számítható ρ, u, e . Pl: $\rho = (\rho u) / u$
Az állapotegyenletből számítható p .
Meghatározzuk F és Q értékeit az $n+1/2$ időszinten.

2. lépés

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{F_{i+1}^{n+1/2} - F_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x} = \frac{Q_{i-1/2}^{n+1/2} + Q_{i+1/2}^{n+1/2}}{2}$$

- Ismertesse a másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszert!

Időben előrehaladó explicit séma. Feltételesen stabilis:

$$\Delta t = \sigma \frac{\Delta x}{a + |u|} \quad \sigma \leq 1$$

A lökéshullámok környezetében erősen oszcillál az eredmény.
Korrigálni kell a fluxusokat, vagy mesterséges viszkozitást kell alkalmazni.

Egy hasonló módszer FLUENT-ben: density based solver + explicit
time integration. Itt csak a σ értéke állítható be, az időlépést ebből számolja.

Peremfeltételek: A peremeken alkalmazhatunk például karakterisztikákat.

- Milyen stabilitási feltételt kell betartani és milyen egyéb problémák jelentkeznek a másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszer alkalmazása esetében?