

A numerikus megoldás módszere

$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Parabolikus PDE ismeretlenek: $u(x,y)$ és $v(x,y)$
 Diszkrét pont rácson reprezentáljuk: u_{ij} és v_{ij}

Diszkrétizálás

Explicit módszer: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$

Kiszámítjuk minden j-re

$$u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \Delta y} = U_i \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \left(v_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} - v_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \right)$$

Kiszámítjuk minden i-re

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \right) + \frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y} = 0$$

A numerikus stabilitás csak kicsi Δx lépések alkalmazásával érhető el.

Diszkrétizálás

Implicit módszer: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$

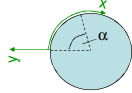
$$u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2 \Delta y} = U_i \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \left(v_{i,j+1/2} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\Delta y} - v_{i,j-1/2} \frac{u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}}{\Delta y} \right)$$

Minden új i érték esetén egy triidiagonál mx-ú egyenletrendszert oldunk meg. A Gauss-elimináció speciális változata: Thomas-algoritmus.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \right) + \frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y} = 0$$

3. szorgalmi feladat

- a) Készítsen numerikus megoldást egy tengelyre merőlegesen megfűjt körhenger homlokfelületén kialakuló lamináris határréteg sebességmegoszlására $Re_D=10000$ esetén! A külső áramlás U sebességét a henger körüli potenciális áramlás alapján számítsa ki! A határréteg görbületéből adódó erők elhanyagolhatók. $\alpha: 0..100^\circ$ tartományban változhat. Jelenítse meg a sebességmegoszlást $\alpha=45^\circ$ -nál y függvényében és számítsa ki a leválási pont α értékét.
- b) A lamináris határrétegre vonatkozó hasonlósági szabályok alkalmazásával skálázza át a 45° -hoz tartozó sebességmegoszlást $Re_D=2500$ Reynoldsszámú áramlásra! A numerikus megoldóval ellenőrizze az átszámítás helyességét!

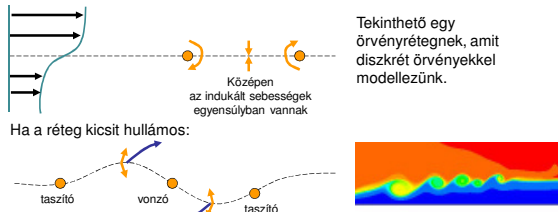


Kérem, hogy a választát képletekkel, ábrával és néhány mondatos indoklással max. 8 oldalas PPT fájlban adja meg a Poseidon rendszerben kiírt feladatra! Helyes megoldással 5 vizsgapont szerezhető.

A határréteg instabilitása

1) Kelvin-Helmholtz instabilitás

Bármely inflexiós ponttal rendelkező sebességprofil instabil.
Ez sűrűdásmentes folyadékra is igazolható (inviscid instability)



Pl. inflexiós pont alakul ki a határrétegben, a áramlás irányában növekvő nyomás miatt, vagy leválás következtében.

Az atmoszférikus határrétegben

vagy atmoszférikus határrétegben, ha a hideg levegő a meleg levegő alá folyik...



[Vincent van Gogh, Csillagos éj]

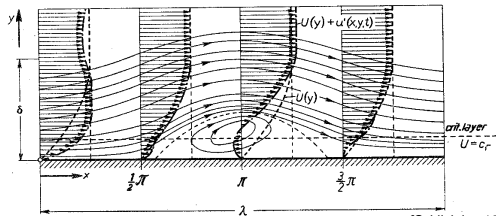
Ez azonban nem magyarázza, hogy miért válik turbulenssé egy konvex sebességprofi.

A határréteg instabilitása

2) Tollmien-Schlichting hullámok

A sűrűlítés következtében még konvex sebességprofil esetén is erősödő hullámok alakulnak ki a határrétegben. Ennek igazolására a határréteg alapáramlásán hullám alakú zavarást feltételezzük, melynek áramfüggvénye:

$$\psi(x, y, t) = f(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}: \text{valós} \quad \beta: \text{komplex, képzetes része a nagytáji tényező}$$



[Schlichting 16.8]

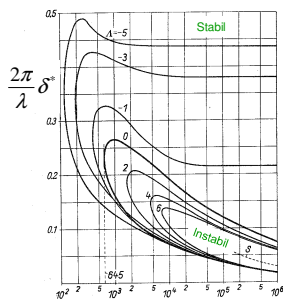
A határréteg instabilitása

Stabilitási határ

Dimenziótlán nyomásgradiens:

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad \Lambda < 0: \text{diffúzor} \quad \Lambda > 0: \text{konfúzor}$$

$$\Lambda \sim - \frac{d\left(\frac{p}{\rho U_\infty^2}\right)}{d\left(\frac{x}{\ell}\right)} = - \frac{dp'}{dx'}$$



Ha a nyomás áramlás irányában nő, egyre szélesebb hullámszám tartományban és egyre jobban erősödnek a zavarások.

$$Re_{\delta^2} = \frac{U_{\infty} \delta^2}{\nu}$$

Tranzíció

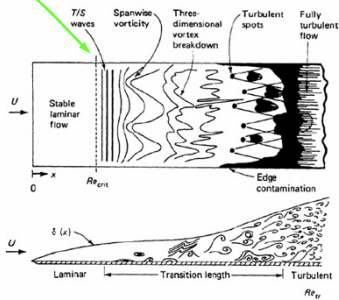
A lamináris határréteg instabilitása:

A Tollmien-Schlichting hullámok amplitúdója exponenciálisan nő.

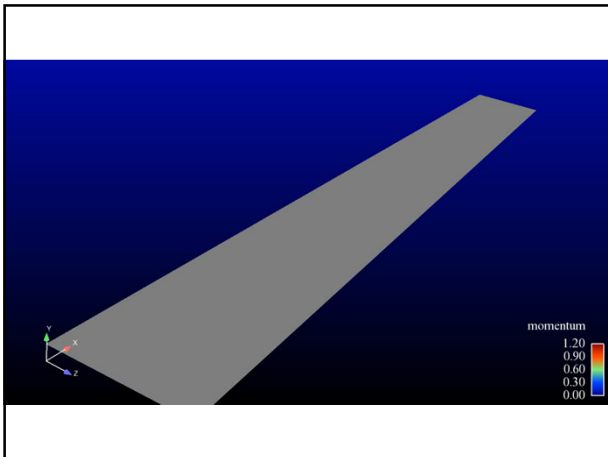
Felülnézetben:

Tranzíció okai:

- Természetes tranzíció**
A felszín egyenetlen felszín által keltett kezdeti zavarások; ezek erősödése dp/dx -től függően.
- Bypass tranzíció**
A tranzíciót a főáramlás turbulenciája segíti.
- Leválás okozta tranzíció**
A lamináris határréteg leválása inflexiós pontot hoz létre az $u(y)$ sebességprofilon, ami instabil.
- Keresztáramlás okozta tranzíció**
Pl. hátrányilazott szárnyon vagy forgó test felületén.



[White: Viscous Fluid Flow, 1991]



Reynolds-átlagolás

A sebességet és nyomást felbonthatjuk átlagértékre és ingadozásra:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad p = \bar{p} + p'$$

Így az ingadozások átlagértéke 0.

Ezt a felbontást beírva a mozgásegyenletbe, képezzük annak átlagát. Ennek eredményeként minden lineáris tagban zérussá válik az ingadozások átlaga és az eredeti Navier-Stokes egyenlethez hasonló összefüggést kapunk az átlagsebességre:

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = -\nabla \bar{p} + \rho \mathbf{g} + \underbrace{\mu \Delta \bar{\mathbf{v}} - \rho \bar{\mathbf{v}}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}'}_{\text{Új tagok keletkeznek a konvektív tagból}}$$

Reynolds-feszültségek

Az átlagolt mozgásegyenletben fellépő új erő felírható egy tenzor divergenciájaként:

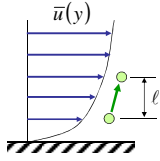
$$-\rho \bar{\mathbf{v}}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}' = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_R$$

$$\boldsymbol{\tau}_R = \begin{pmatrix} -\rho \overline{u'^2} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{v'u'} & -\rho \overline{v'^2} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{w'u'} & -\rho \overline{w'v'} & -\rho \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\tau}_R$ a Reynolds-féle feszültség tenzor.

Az átlag-sebességmező kiszámítása érdekében módszert kell találnunk $\boldsymbol{\tau}_R$ komponenseinek számítására, modellezni kell a turbulencia hatását.

A Prandtl-féle keveredési úthossz modell



1.) Átlagosan u' nagyságú sebesség-ingadozást okoz, ha egy folyadékrész l úthosszal elmozdul a falra merőlegesen:

$$u' = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

l keveredési úthossz a faltól távolodva nő, mert az örvények egyre nagyobbak lehetnek.

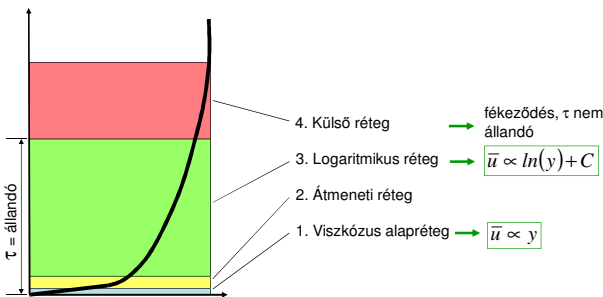
2.) A többi ingadozó sebességkomponens hasonló nagyságú:

$$u' \cong v'$$

Ezekből a megfontolásokból kiindulva kiszámíthatjuk a Reynolds-feszültségeket:

$$\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \nu_t \text{ turbulens viszkozitás nem állandó értékű}$$

A turbulens határreteg szerkezete



Sebesség profilok

Viszkózus alaprég

$$\tau = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_w$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$(u^*)^2 = \nu \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu} = y^+$$

$0 < y^+ < 5$ (...10)

Logaritmusos réteg

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \cong \tau_w$$

$$l = \kappa y$$

$$(u^*)^2 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

$$\frac{d\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y}$$

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u^* y}{\nu_0} \right) + C$$

Kármán konstans:
 $\kappa = 0.4$

Sima lapra:
 $C = 5.45$

(C érdesség-függő)

(30...) $60 < y^+ < 300$?

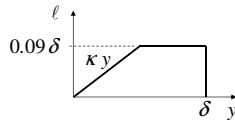
Numerikus megoldás

A numerikus modellben a turbulencia hatását figyelembe vehetjük úgy, hogy a folyadék viszkozitásához egyszerűen hozzáadjuk ν_t turbulens viszkozitást:

$$\nu_t = \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

ℓ értékét a logaritmikus rétegen kívül korlátozni kell!

Escudier korreláció: $\ell = \max(\kappa y, 0.09 \delta)$



Kapcsolt transzportfolyamatok

Ha u és v már ismertek, a határréteg megoldó programunkkal kiszámíthatjuk a hőmérséklet és koncentráció mezőket is:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((a_t + a) \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((D_t + D) \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

Hővezetési tényező.
Hőmérsékletvezetési tényező [m^2s^{-1}]: $a = \frac{\lambda}{\rho_0 c_p}$
fajhő állandó nyomáson

ν_t alapján számolhatjuk a többi transzport tényezőt:

$$a_t = \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t} \leftarrow \text{Turb. Prandtl-szám}$$

adott empirikus állandó (kb. 1)

$$D_t = \frac{\nu_t}{\text{Sc}_t} \leftarrow \text{Turb. Schmidt-szám}$$

adott empirikus állandó, (kb. 1)
