2. Potenciálos áramlások

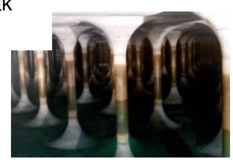
Dr. Kristóf Gergely
Department of Fluid Mechanics, BME
2015.

Potenciálos áramlások

- Nyugvó térből eredő áramlás potenciálos mindaddig, amíg a falon keletkező örvényesség bele nem keveredik.
- A legtöbb analitikus megoldás potenciálos áramlásokra ismeretes. [H.Lamb, 1932, első kiadása 1879]
- Egyszeresen összefüggő tartományban a potenciálos áramlás mozgási energiája a legkisebb a tartomány határán adott normális sebességkomponensű áramlások közül. [Thomson, 1849]

Alkalmazási példák


- Áramlás az elszívás közelében
- Szárnyak
- Szivárgás, kutak
- Ivóvíztárolók

Sebességi potenciál (ϕ)

Örvénymentes áramlás esetén: $\nabla \times \underline{v} = 0$

Definiálhatjuk ϕ sebességi potenciált, melyre: $\underline{v} = \nabla \phi$ azaz:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

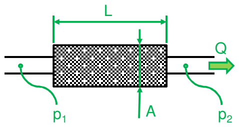
Elég ϕ-t meghatároznunk, abból u, v, w, már könnyen számolhatók, tehát ϕ bevezetésével háromról egyre csökkentettük az ismeretlen skalármezők számát.

Az örvénymentességen kívül más fizikai kikötést nem tettünk, így ϕ alkalmazható kompresszibilis áramlások esetén is.

Szivárgó áramlások

Porózus anyagokban, például talajban, kőzetekben, adszorber ágyakban az egyfázisú szivárgó áramlások általában igen jó közelítéssel leírhatók a Darcy-törvénnyel. Q térfogatáram egy vízszintes tengelyű porózus csatornában:

$$Q = -\frac{p_2 - p_1}{L} A \frac{k}{\mu}$$



melyben a dinamikai viszkozitás μ [Pa.s]=ρν, k [m²] pedig a porózus anyag áteresztőképessége. k értékét legtöbbször Darcy-egységben adják meg: 1 D ≅ 10^{12} m². A Darcy-törvény általános alakja:

$$\underline{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla (p + \rho g z)$$

Tehát a sebességi potenciál:

$$\phi = -\frac{k}{\mu} (p + \rho g z)$$

A nyomásmező meghatározása

ϕ (és ebből v̲) ismeretében a nyomásmezőt utólag is kiszámíthatjuk a Bernoulli-egyenlet felhasználásával. Ideális folyadékra (ν=0, ρ=áll.):

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) + \rho g (z_1 - z_2)$$

Szivárgó áramlás esetében a nyomásmező más kapcsolatban áll a mozgásállapottal:

$$\phi = -\frac{k}{\mu} (p + \rho g z)$$

ezért:

$$p_2 - p_1 = \frac{\mu}{k} (\phi_1 - \phi_2) + \rho g (z_1 - z_2)$$

ϕ kiszámítása

A kontinuitás szerint:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \Delta \phi = 0$$

ϕ tehát harmonikus függvény, azaz megoldása a Laplace-egyenletnek.

Egy fontos alapmegoldás a Q [m³/s] intenzitású pontforrás sebességtere:

$$\underline{v} = \frac{Q}{4r^2\pi} e_r \longrightarrow \phi = -\frac{Q}{4\pi\, r} + \text{áll.}$$

A megoldások szuperponálhatók. Bármely potenciálos áramképet megközelíthetünk a határfelületen alkalmasan fölvett forrásmegoszlással.

Áramfüggvény (ψ)

Def: $\underline{v} = \nabla \times \underline{\psi}$ $\underline{\psi}$ vektorpotenciál.

$\underline{\psi}$ automatikusan kielégíti a kontinuitási egyenletet állandó sűrűségű folyadékra, mivel:

$$\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\psi} \equiv 0$$

2D-ben ψ skaláris mennyiség, mivel: $w = 0$ és $\frac{\partial ...}{\partial z} = 0$

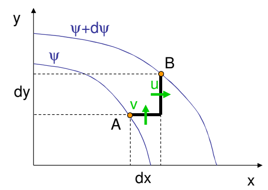
$$\underline{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial \psi_y}{\partial z}} \\ \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial z}} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \cancel{\frac{\partial \psi_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial y}} \end{pmatrix}$$

ezért $\psi = \psi_z$, továbbá

$$\rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Tehát 2D áramlásokat egyetlen ψ skalármezővel leírhatunk, 3D-ben viszont 3 komponense van.

ψ fizikai értelmezése 2D-ben



Az áramfüggvény teljes differenciálja:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \text{és} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

$$d\psi = -v\, dx + u\, dy$$

ψ az A és B pontok közötti térfogatáram (1 m széles tartományban):

$$Q_{A-B} = \psi_B - \psi_A$$

ψ szintvonalain nem áramlik át a folyadék, ezért ψ szintvonalai **áramvonalak**.

A kontinuitás: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$ 2D-ben is teljesül.

2D örvénymentes áramlás

ψ eddig leírt tulajdonságai örvényes áramlásra is érvényesek. Szorítkozzunk mostantól örvénymentes áramlásokra:

$$\left(\nabla \times v\right)_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \text{és} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta \psi = 0$$

Tehát áramfüggvény is lehet bármely harmonikus függvény.

Komplex potenciál (w)

ψ is és ϕ is harmonikus függvények: $\Delta \psi = 0 \quad \text{és} \quad \Delta \phi = 0$

továbbá kielégítik a Cauchy-Riemann összefüggéseket:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Tehát képezhetik egy komplex függvény valós és képzetes részét:

$$w(z) = \phi(z, y) + i\,\psi(x, y)$$

z a komplex helyvektor: $z = x + iy$

Bármely analitikus komplex függvény valós és képzetes részei állandó sűrűségű, stacionárius, potenciálos síkáramlást írnak le.

Már csak a peremfeltételeket kell kielégítenünk.
Megvizsgálunk néhány alapmegoldást (pl. ln(z), z^2 stb.), majd ezeket összegezve, transzformálva próbálunk bonyolultabb peremfeltételeket kielégíteni.

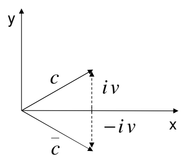
A komplex sebesség (c)

A sebesség egy komplex számmal adható meg:

$$c = u + i\,v$$

A sebesség komplex konjugáltját w differenciálásával nyerhetjük.
A differenciálás bármely irányban végezhető:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial iy} = u - i\,v = \bar{c}$$



Potenciálok

	ψ	ϕ	w
Neve	áramfüggvény	sebességi pot.	komplex pot.
Változó ρ esetén	nincs **	van	nincs
Örvényes áramlásra	van	nincs	nincs
3D-ben	vektor	skalár	nincs
Definíció	$\nabla \times \underline{\psi} = \underline{v}$	$\nabla \phi = \underline{v}$	$w = \phi + i\psi$

** 2D összenyomható áramlásra is definiálható áramfüggvény.