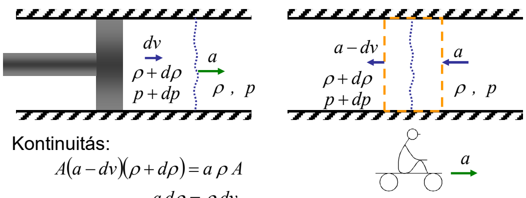
Kompresszibilis áramlások számítása

Dr. Kristóf Gergely

2016.10.15.

Hangsebesség



Kontinuitás:

$$A(a-dv)(\rho+d\rho)=a\,\rho\,A$$

$$a\,d\rho=\rho\,dv$$

Impulzus tétel: $\sum \vec{I}=\sum \vec{P}$

$$\underbrace{A\,\rho\,a}_{q_m}\underbrace{(a-(a-dv))}_{dv}=A\,dp$$

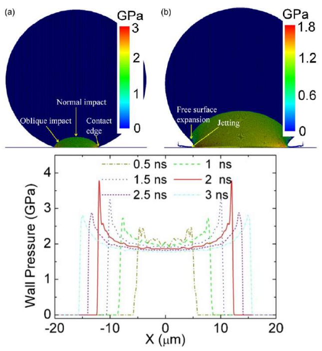
$$\boxed{dp=\rho\,a\,dv}$$

Allievi egyenlet

$$a^2=\frac{dp}{d\rho}$$

Acélban	~5000 m/s
Vízben	~1500 m/s
Levegőben	~340 m/s

Példa: nyomáshullám terjedése egy felületnek ütköző folyadékcseppben



Hangsebesség ideális gázokban

A kis amplitúdójú nyomáshullámok izentrópikus állapotváltozást okoznak (hőközlés, súrlódás nincs):

$$\boxed{\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\text{const.}}$$

γ a fajhőviszonyt jelöli
Pl. kétatomos gázok esetében 1.4 az értéke.

$$\ln p-\gamma\ln\rho=\ln(\text{const.})$$

$$\frac{dp}{p}-\gamma\frac{d\rho}{\rho}=0$$

$$\frac{dp}{d\rho}=\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma\,R\,T$$

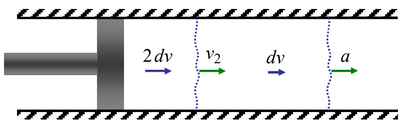
$$\boxed{a=\sqrt{\gamma\,R\,T}}$$

Levegőre:

at 0°C: a=331 m/s
at 20°C: a=343 m/s

Nemlineáris hullámterjedés

Mi történik, ha még egy nyomáshullámot indítunk?



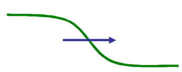
$v_2 > a$ mivel:

- A második hullám gyorsabban terjed a dv sebességű gázban.
- A második hullám nagyobb hangsebességű gázban terjed, mivel: $p\uparrow \;\rightarrow\; T\uparrow \;\rightarrow\; a\uparrow$.

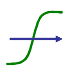
A második hullám előbb-utóbb utoléri az elsőt.

Lökéshullámok

A nyomáshullámok meredekednek, végül **lökéshullám** alakul ki:



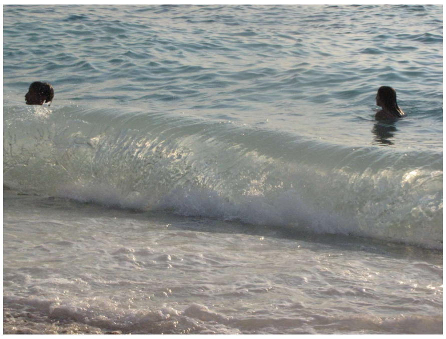
Az expanziós hullámok ellentétesen viselkednek:



- Matematikailag a mezőváltozók szakadási helyeként kezeljük (v, p, ρ, T, a hirtelen változik).
- Gyorsabban terjed mint a gyenge hullámok.
- A szuperszónikus áramlás lassulása lökéshullámokkal történik.
- Disszipatív folyamat. (Össznyomás veszteséggel jár.)

Analógia

Sekély vízben megtörő hullámok

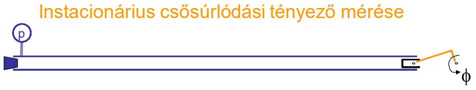


Analógia

Vízugrás a mosogatóban

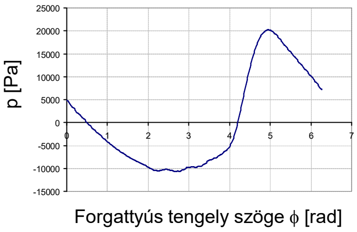
Példa

Instacionárius csősúrlódási tényező mérése



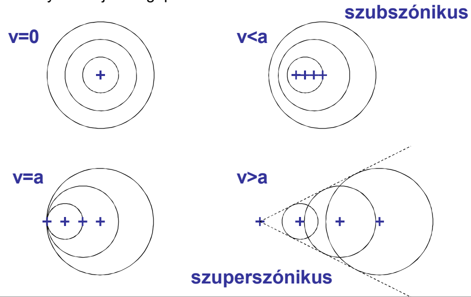
Csőhossz:
6.05 m
Átmérő:
36 mm
Dugattyú löket:
50 cm^3.

29 Hz gerjesztésnél ezt mérhetjük:



Kis zavarások terjedése

Egy v sebességgel mozgó tárgy korábbi pozíciói és az ezekből kiindult hullámok helyzete a jelenlegi pillanatban:



Példa

Puskalövés Schlieren optikával rögzítve

[http://www.phschool.com/science/science_news/articles/revealing_covert_actions.html]

1D időfüggő izentrópikis áramlás

Pl: kompresszorok, kipufogók áramlása.

Kontinuitás: $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0$$

Euler-egyenlet: $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Izentrópikus egyenlet: $$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}$$

p_0 és ρ_0 a referencia állapotra adott állandók.
Ismeretlenek p, ρ, u mint x és t függvényei.

Új mezőváltozót vezetünk be: „a” hangsebesség

Csak egy állapotjelzőt lehet megválasztani. Használjuk állapotjelzőként az „a” hangsebességet és ezzel küszöböljük ki ρ-t és p-t.
Új mezőváltozóink: u és a; mindkettő m/s dimenziójú.

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{{\rho_0}^\gamma} \qquad a^2=\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=áll.}=\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma\,\rho^{\gamma-1}\frac{p}{\rho^\gamma}=\gamma\frac{p_0}{{\rho_0}^\gamma}\rho^{\gamma-1}$$

$$\ln(p)-\gamma\ln(\rho)=\ln\left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}\right) \qquad 2\,ln(a)=(\gamma-1)ln(\rho)+ln\left(\gamma\frac{p_0}{{\rho_0}^\gamma}\right)$$

$$\frac{dp}{p}=\gamma\frac{d\rho}{\rho} \qquad 2\frac{da}{a}=(\gamma-1)\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{da}{dp}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a}{p} \qquad \frac{da}{d\rho}=\frac{\gamma-1}{2}\frac{a}{\rho}$$

Átalakítjuk az alapegyenleteket

Kontinuitás: $$\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{da}{d\rho}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{da}{d\rho}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\gamma-1}{2}\frac{a}{\rho}=0$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\gamma-1}{2}a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

a^2

Euler-egyenlet: $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\underbrace{\frac{da}{dp}\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{a}}_{1}=0$$

$$\frac{\gamma-1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\gamma-1}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial a}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\gamma-1}{2}a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\gamma-1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\gamma-1}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial a}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

(1) + (2) $$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(a+\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\alpha}+(u+a)\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(a+\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\alpha}=0$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+(u+a)\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0$$ C_+=dx/dt=u+a irány mentén: α=állandó.

(1) - (2) $$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(a-\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\beta}+(u-a)\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(a-\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\beta}=0$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}+(u-a)\frac{\partial\beta}{\partial x}=0$$ C_-=dx/dt=u-a irány mentén: β=állandó.

Karakterisztikák

C_+ és C_- karakterisztikus irányok, α és β Riemann-féle invariánsok.

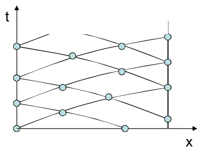
Ha α és β adottak ... abból a és u meghatározható:

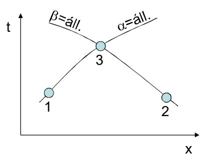
$$\left.\begin{aligned}\alpha&=a+\frac{\gamma-1}{2}u\\ \beta&=a-\frac{\gamma-1}{2}u\end{aligned}\right\}\rightarrow \quad a=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad u=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}$$

a-ból pedig meghatározható a többi állapotjelző:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2=\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

Numerikus megoldás





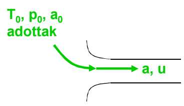
$$\begin{aligned}\alpha_3&=\alpha_1\\ \beta_3&=\beta_2\end{aligned} \;\longrightarrow\; a_3=\frac{\alpha_3+\beta_3}{2} \qquad u_3=\frac{\alpha_3-\beta_3}{\gamma-1}$$

$$x_3-x_1=0.5[(u_3+a_3)+(u_1+a_1)](t_3-t_1)+o(\Delta t^2)$$
$$x_3-x_2=0.5[(u_3-a_3)+(u_2-a_2)](t_3-t_2)+o(\Delta t^2)$$

t_3, x_3 számítható.

Peremfeltételek

Beáramlás nyitott csővégen: energiaegyenlet



$$T_0=T+\frac{u^2}{2c_p}=\frac{a^2}{\gamma R}+\frac{u^2}{2c_p}$$

$$T_0=\frac{1}{\gamma R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{2c_p}\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}\right)^2$$

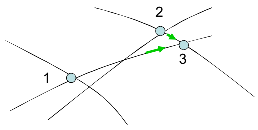
Vagy α, vagy β már adott a belülről kifelé tartó karakterisztika alapján.
A másik Rieman-féle invariáns a fenti egyenletből meghatározható

Kiáramlás: $$a_0=a=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Zárt csővég: $$u=0 \longrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}=0 \longrightarrow \alpha=\beta$$

Problémák

- A fizikai folyamattól függően a numerikus háló eldurvulhat.
- Azonos irányba tartó karakterisztikák metszhetik egymást.



Véges térfogatok módszerével

Ugyancsak az előbbi csőáramlás példájára alkalmazzuk.

Kontinuitás: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

Mozgásegyenlet: $$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u^2 + p\right)}{\partial x} = 0$$

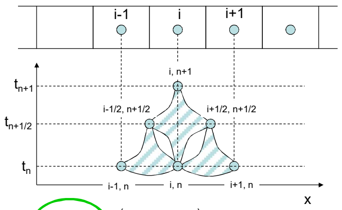
Állapotegyenlet: $$p = \rho R T$$

Energiaegyenlet: $$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u e + p u\right)}{\partial x} = 0 \qquad e = c_v T + \frac{u^2}{2}$$

Formális vektorokba rendezhetjük: $$\boxed{\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \underline{Q}}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{bmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u e + p u \end{bmatrix} \qquad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszer:



1. lépés

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - \left(U_i^n + U_{i+1}^n\right)/2}{\Delta t/2} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = \frac{Q_i^n + Q_{i+1}^n}{2}$$

U ismeretében számítható ρ, u, e. Pl: ρ=(ρu)/u
Az állapotegyenletből számítható p.
Meghatározzuk F és Q értékeit az n+1/2 időszinten.

2. lépés

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = \frac{Q_{i-1/2}^{n+1/2} + Q_{i+1/2}^{n+1/2}}{2}$$

Időben előrehaladó explicit séma. Feltételesen stabilis:

$$\Delta t = \sigma \frac{\Delta x}{a + |u|} \qquad \sigma \le 1$$

A lökéshullámok környezetében erősen oszcillál az eredmény.
Korrigálni kell a fluxusokat, vagy mesterséges viszkozitást kell alkalmazni.

Egy hasonló módszer FLUENT-ben: density based solver + explicit time integration. Itt csak a σ értéke állítható be, az időlépést ebből számolja.

Peremfeltételek: A peremeken alkalmazhatunk például karakterisztikákat.