

*Dr. Gausz Tamás*



AEROELASZTIKUS JELENSÉGEK  
ÉS  
DINAMIKAI TERHELÉS

► Elemek ◀

**BUDAPEST, 2015**

# Tartalomjegyzék

<i>Aeroelasztikus jelenségek és dinamikai terhelés</i>	1
I. Az aeroelasztikusság alapjai	2
I.1. Az aperiodikus aeroelasztikus jelenségek	5
I.1.1. A divergencia	6
I.1.2. A reverzálás	10
II. Az instacioneritás és hatása	13
II.1. Vékony profilok kvázi stacioner jellemzői	21
II.2. További számítási módszerek	22
III. Periodikus aeroelasztikus jelenségek	25
III.1. A szárny flutter egyszerűsített vizsgálata	30
III.2. Számítási példa	32
IV. Aeroelasztikus modellek	36
V. Merevségi és kiegyensúlyozási követelmények	44
VI. Rugalmas repülőgép – számítási példa	48
VI.1 Számpélda	53
VII. Sajátlengéskép számítás	60
VII.1 Az átviteli mátrixok módszere	60
VII.2 Sajátlengéskép számítás próbafüggvények segítségével	64
 <i>Irodalomjegyzék</i>	 72

# Aeroelasztikus jelenségek és dinamikai terhelés

Az aeroelasztikus jelenségek értelmezéséhez tekintsünk példaként egy repülőgép szárnyat. A szárny a rajta ébredő terhelések hatására általában rugalmasan deformálódik. A deformáció miatt megváltozik a szárny alakja, illetve a deformáció időbeli változása alapján értelmezzük a deformáció sebességét is. Ezek a tényezők befolyásolják, megváltoztatják a szóban forgó szárny terhelését. Ezzel egy kölcsönösen összefüggő jelenség csoportot találtunk – a légerők, a tehetetlenségi erők és a rugalmas erők (illetve ezen erők nyomatókai) együttes hatására előálló folyamatot nevezzük aeroelasztikus jelenségnek. Természetesen igen sokféle aeroelasztikus jelenség létezik.

A szerkezetekben ébredő tényleges igénybevételt az időben változó deformáció határozza meg. A deformáció alapján számított terhelést nevezzük dinamikai terhelésnek. Ez azért fontos, mert ez a valóban létrejövő terhelés, illetve igénybevétel. A dinamikai terhelés alapján pedig, az igénybevételek pontosabb ismeretében a szerkezetek viselkedése (akár a törés, akár a kifáradás szempontjából) nagyobb biztonsággal becsülhető, mint a hagyományos módon számított terhelésnél alapján.

Az aeroelasztikus jelenségek és a hozzájuk kapcsolódó dinamikai terhelések igen széles területet ölelnek át. E területek mindegyikével foglalkozni, többször még az említés szintjén sem lehetséges. A következőkben válogatott alapismereteket közlünk, azonban tényleges alkalmazás esetén ezeket is jelentősen bővíteni szükséges. E tekintetben, az irodalomjegyzékben szereplő, illetve a további, ezzel a területtel foglalkozó szakirodalomra utalhatunk csak.

Egy példaként megemlíthetjük az aero-termo-elasztikus jelenségek kérdéskörét: ez a terület a repülési sebesség növekedésével, az aerodinamikai felmelegedés jelentőssé válásával lett meghatározó fontosságúvá a nagysebességű repülés területén. Egy másik, modern terület – amelyet szintén csak megemlíthetünk – az aero-szervo-elasztikus jelenségek tárgyköre. A modern repülésben a fedélzeti vezérlési és szabályozási rendszerek jelentősége meghatározó. Egyrészt ezek a berendezések képesek lehetnek alkalmasan befolyásolni a repülőgép szerkezetének vagy az egész repülőgépnek a viselkedését. Másrészt ezek a berendezések maguk is rendelkeznek saját dinamikai jellemzőkkel. Egy-egy konkrét vizsgálatban a repülőgépet és a vezérlési valamint szabályozási rendszereit – a lehetőségek keretein belül – komplex egységként kell vizsgálni.

Az aeroelasztikus jelenségek, illetve a hozzájuk kapcsolódó dinamikai terhelések nem csak a repülésben bírnak igen nagy jelentőséggel. Valójában minden, rugalmas szerkezet esetében fontosak, amelyre közegezők hatnak. A sok példából kiemeljük a hidakat, amelyek vizsgálatában ez kiemelkedően fontos terület.

Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy a dinamikai terhelés nem jelent feltétlenül nagyobb terhelést – ez egy, a hagyományos módon számítottnál pontosabb terhelés eloszlás, illetve

lefutás lesz, amelynek a legnagyobb értéke akár kisebb, akár nagyobb is lehet a hagyományos módon számított terhelésnél. Amennyiben a dinamikai terheléssel számolunk, akkor először is elhagyhatjuk a korábbi vizsgálatba emiatt bevett biztonsági tényezőt, másodszer a terhelések szerkezeten történő eloszlásának ismeretében (pontosabban) meghatározható a legnagyobb igénybevétel helye is, harmadszor a terhelés lefutás alapján terhelési spektrum állítható össze, ami a kifáradási vizsgálatokhoz nélkülözhetetlen.

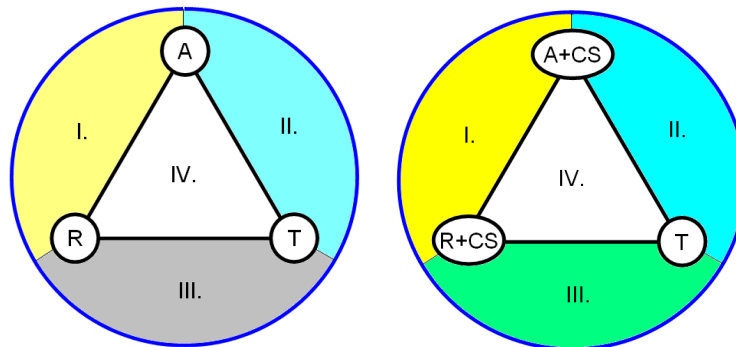
Az aeroelasztikus jelenségek ugyan egyidősek a repüléssel, a jelentőségük azonban folytonosan nő, mivel a repülési sebesség növekedésével, az egyre karcsúbb szerkezetek alkalmazásával, illetve a modern vezérlési és szabályozási rendszerek elterjedésével hatványozottan válnak egyre fontosabbá. Az aeroelasztikus jelenségekkel - a repülés korai szakaszában még ismeretlenek lévén - nem számoltak. Érdekességként említjük meg, hogy [3] szerint 1903-ban, Samuel P. Langley repülőgépeének szárnya minden bizonnyal szárnydivergencia következtében törött el. A Fokker D-8, 1917-ben épült vadászrepülőgépek szárnya pedig – nagy valószínűséggel – flatter következtében ment tönkre.

Az aeroelasztikus jelenségek tanulmányozásakor az I.1. ábra szerinti három erőhatásnak megfelelően a kinetika, a szerkezeti mechanika és az aerodinamika egyidejű, illetve együttes alkalmazása szükséges. Ezért e problémák tanulmányozása komoly erőráfordítást igényel. Már itt is megjegyezzük, hogy napjainkra több, nagy numerikus szoftver is rendelkezik aeroelasztikus megoldó blokkal – ezek magas igényeket is kielégítő megoldások meghatározására alkalmasak. Ugyanakkor ezeket a szoftvereket igen elővigyázatosan kell kezelni, mivel nagyon sok múlik az alkalmazón (pl. a hálózás módja, a hálózás sűrűsége, a peremfeltételek megadása, az anyagjellemzők megadása stb.) – itt könnyű hibát elkövetni.

A bevezető lezárásaként hangsúlyozzuk, hogy az elméleti vizsgálatokat lényegében mindig követnie kell a gyakorlati ellenőrzésnek, kísérleteknek, a megfelelő fázisban a kísérleti repüléseknek. Egyes jelenségek vizsgálata elméleti módszerekkel nem lehetséges, vagy nem célszerű: ezeket a jelenségeket – kellő elővigyázatossággal – kísérleti módszerekkel kell vizsgálni, illetve az előfordulásuk valószínűségét a megengedett üzemi tartományban elfogadhatóan kicsire csökkenteni. Tipikus példa erre a rázás-lobogás (buffeting), az az aeroelasztikus jelenség csoport, melynél a rezgést, lengést egy másik, a repülőgép körüli áramlásban korábban elhelyezkedő elemről történő leválásból származó örvény vagy lökéshullám gerjeszti. Mivel az ilyen gerjesztések intenzitásának változása sztochasztikus jellegű, azért ezeket a jelenségeket számítással követni igen nehéz. Amennyiben ilyen jelenségre számítani lehet, akkor ezt kísérletileg célszerű (kell) vizsgálni. Illetve a kísérletek alapján kell olyan szerkezeti elrendezést kialakítani, ahol ezek a jelenségek már – elfogadható valószínűséggel – kizárhatók.

# I. Az aeroelasztikusság alapjai

Az aeroelasztikus jelenségek és a dinamikai terhelések elemzésekor általában az aerodinamikai, a szerkezeti és a tehetetlenségi erőket vizsgáljuk. Ezt szemlélteti az 1. ábra, amelyen a Collar féle erőháromszög hagyományos alakja, illetve a jobb oldalon az általunk módosított változat látható:



I.1. ábra: Collar féle erőháromszög – hagyományos (balra) és kiegészített (jobbra)

Az I.1. ábra bal oldalán a három körben az aerodinamikai (A), a rugalmas (R) és a tehetetlenségi (T) erők láthatók. Az aerodinamikai erőkbe beleértendő az aerodinamikai csillapítás, amit azonban a jobb oldali ábrán külön kihangsúlyoztunk (A+CS). A jobb oldali ábrán a rugalmas erőket is kiegészítettük a szerkezet által kifejtett csillapító erőkkel (R+CS). Ezt a csillapítást a későbbiekben ugyan elhanyagoljuk majd, mivel a hagyományos szerkezetek esetében a többi erőhöz képest az értékük kicsi. Más – általunk nem tárgyalt – esetben azonban ez igencsak lényeges lehet. Modern szerkezetekben sok helyen kompozit anyagokat alkalmaznak, ezek belső csillapítása jelentős, gyakran rezgéscsillapításra is felhasználják őket. Meg kell említeni még az elasztomer anyagokat – ezek nagy hiszterézisű anyagok és elsődlegesen lengéscsillapításra használják őket. A méretezésük során vizsgálni kell az általuk felemészített energia következtében előálló felmelegedésüket: ennek nem szabad egy bizonyos, az anyagjellemzők között adott hőmérsékletet túllépni. Vagyis az anyagszerkezeti csillapítást – modern szerkezeti anyagok alkalmazása esetén – feltétlenül figyelembe kell venni.

A csillapítás és rugalmasság kapcsán meg kell még említeni a repülőgépek futóműveinek rugós tagjait is. A legegyszerűbb esetben ez alkalmas anyagból készült lemezrugó, viszonylag kis csillapítással. Gyakran alkalmazzák az olaj-levegős rugóstagokat, amelyekben hidrodinamikai csillapítás mellett fontos szerepet játszik a kompresszió, illetve az expanzió folyamat különbözősége. Az acélrugós rugóstagban pedig a Coulomb súrlódás következtében (is) létrejön csillapítás.

A következőkben a fent felsorolt csillapítások közül - az egyszerűség kedvéért - csak az aerodinamikai csillapítás hatását vizsgáljuk. Ennek megfelelően elegendő a 1. ábra bal oldali részét tekinteni. Ezen római számmal jelölve, négy rész terület látható. E területek alapján az alábbi rendszert vezetjük be:

- I. Ide tartoznak azok a jelenségek, amelyeknél a tehetetlenség elhanyagolható, a légerők és a rugalmas erők hatása alatt következnek be. Ezeket aperiodikus aeroelasztikus jelenségnek nevezzük; tipikusan ilyen a divergencia, a reverzálás vagy a statikai stabilitás változása.

- II. Ide tartoznak azok a jelenségek, amelyek a légerők és a tehetetlenségi erők hatása alatt következnek be, itt a rugalmasság hanyagolható el – ide tipikusan a merev repülőgép mozgása tartozik.
- III. Itt a rugalmas és a tehetetlenségi erők hatása jelentős a légerők elhanyagolhatók – ez a mechanikai rezgések, vibráció területe. Ide tartozik például a futómű rugózási folyamata is.
- IV. Erre a területre azok a jelenségek esnek, amelyeknél mindhárom erőhatás lényeges. Ezeket nevezzük periodikus aeroelasztikus jelenségnek. Tipikusan ide tartozik a (szárny) flatter, vagy a rázás, lobogás is. Ez a legfontosabb terület, mivel ide sorolandó az összes jelenségekört egyesítő rugalmas repülőgép dinamikája is.

A periodikus aeroelasztikus jelenségek vizsgálata során gerjesztő és csillapító hatásokkal találkozunk. A gerjesztő hatások általában a légerők és a nyomatékaik – ezek első közelítésben a repülési sebesség négyzetével arányosak; a repülési sebesség növekedésekor a sebesség négyzetével arányosan nőnek. A csillapító hatások közül a légerők és nyomatékaik csillapító hatásával számolunk csak.

Az aerodinamikai csillapítás – amely tehát, különösen nagyobb sebességeken és klasszikus szerkezeti anyagok alkalmazásakor sokszorta jelentősebb, mint pl. a belső súrlódás hatása – általában a repülési sebesség növekedésével egyenes arányban nő. Feltéve, hogy kisebb repülési sebességeken a csillapítás jelentősebb, mint a gerjesztés, ezeken a sebességeken a periodikus aeroelasztikus folyamatok csillapodnak. A sebesség növekedésével azonban, általában megváltozik a csillapítás és a gerjesztés viszonya, hiszen a gerjesztés sokkal gyorsabban (a sebesség négyzetével arányosan) nő. Azt a sebességet, ahol a csillapítás által felemészített energia egyenlő a gerjesztéssel bevitt energiával, *kritikus sebesség*nek szokás nevezni. A repülőgépeken a kritikus sebességig csillapodó folyamatokkal találkozunk, a kritikus sebességnél ezek a folyamatok nem növekednek, és nem csillapodnak, a kritikus sebesség felett viszont növekedő folyamatok jönnek létre – ezek már veszélyesek lehetnek a repülőgépre.

A csillapításokkal kapcsolatban megjegyzendő, hogy azok passzív és aktív jellegűek lehetnek. A passzív csillapítás a jelenségek természetéből kifolyóan van jelen, fejt ki a hatását. Az aktív csillapítás, ami egy megtervezett és külön kialakított megoldást jelent, csak később, a repülőgépek fejlődésének magasabb fokán jelent meg. Az aktív csillapítást létrehozó szerkezet a repülőgép, vagy egyes részeinek mozgását kíséri figyelemmel és erre az információra alapozva, válaszul a lengéseket alkalmas módon csillapító eljárásokat alkalmaz. Ilyen, aktív csillapításra egy példa a repülőgép szárnyak hajlító-csavaró lengéseinek csökkentése, korlátozása a csűrőkormányok megfelelő, általában azonos irányba történő (kismértékű) kitérítésével. Az aktív csillapítást, és más, fontos feladatokat a repülőgép erre alkalmassá tett vezérlési valamint szabályozási rendszerei valósítják meg. A repülőgépek vezérlési valamint szabályozási rendszereinek a jelentőségét nem lehet eléggé hangsúlyozni, fontosságuk folyamatosan növekszik.

Az aeroelasztikus jelenségeket, a szokásos módon, az alábbi rendszerbe foglalhatjuk:

Aeroelasztikus jelenségek:

Aperiodikus jelenségek (I.1. ábra – I. terület):

Divergencia (szárny divergencia);

Reverzálás (kormánylap reverzálás);

Kormányzási jellemzők és statikai stabilitás változása;

Periodikus jelenségek (I.1. ábra – III. és IV. terület):

Gerjesztett rezgések, lengések:

Rázás;

Lobogás;

Öngerjesztett rezgések, lengések:

Egy szabadságfokú;

Több szabadságfokú;

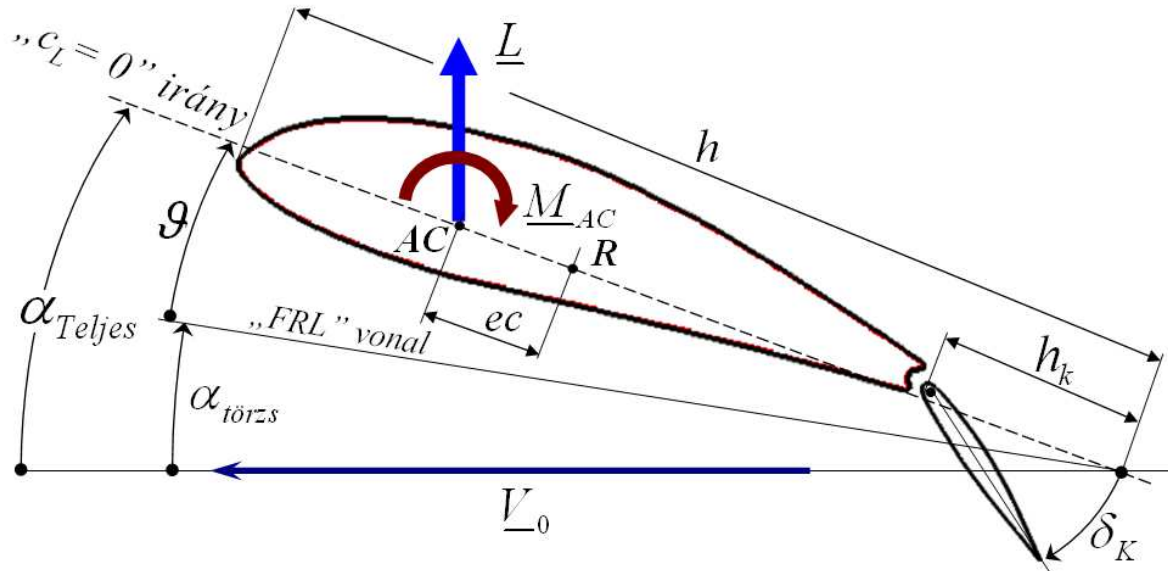
A fenti felsorolásban szereplő, öngerjesztett rezgéseket – amint azt a neve is mutatja – a folyamatból magából következő gerjesztés tartja fenn. Tipikus példája a szárny flutter – a szárny kapcsolt hajlító-csavaró lengése – ez, a szükséges feltételek teljesülése esetén egy önfenntartó, öngerjesztő folyamat.

A fejlődés folyamán a repülőgépek szerkezeti elemei egyre hajlékonyabbak lettek (pl. a kétfedelű elrendezést a szabadon hordó szárnyak váltották fel), a repülési sebesség is növekedett – így az aeroelasztikus jelenségek egyre komolyabb figyelmet igényeltek. Az ennek következtében meginduló kutatások feltárták e jelenségkör alapvető összefüggéseit. A divergenciát Bauhamer és König írták le 1922-ben, a flutter vizsgálatára Theodorsen fejlesztett ki – napjainkban is használatos eljárást, 1934-ben. A jelenségkörrel kapcsolatos kutatások természetesen jelenleg is folytatódnak: alkalmazkodó, aktív válaszra képes szerkezeteket, rendszereket fejlesztenek ki. A jelenségkört pedig több irányba, például az esetlegesen igen nagy sebességek miatt az aero-termo-elasztikus vagy az aero-szervo-elasztikus jelenségkőrré is kiterjesztik.

A következőkben először, az oktatási gyakorlatnak megfelelően az aperiodikus aeroelasztikus jelenségekkel, nevezetesen a divergenciával és a reverzálással foglalkozunk.

## I.1. Az aperiodikus aeroelasztikus jelenségek

Az aperiodikus aeroelasztikus jelenségek esetében a változások viszonylagos lassúsága (akár néhány száz másodperc – ez általános értelemben azért nem túl hosszú idő!) miatt a tehetetlenség figyelmen kívül hagyható. Ebben a körben a (szárny) divergenciát és a kormánylap reverzálást, valamint ezek egyes következményeit vizsgáljuk.



I.2. ábra: Erők és nyomatékok – alap ábra

Az I.2. ábrán egy szárnymetszet számunkra fontos geometriai és aerodinamikai jellemzőit tüntettük fel. Az itt következő vizsgálatokban, az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy:

- ◆ Létezik „AC” pont és a helye a kormánylap kitérítésekor nem módosul (de a  $c_{mAC}$  nyomatéki tényező értéke változik).
- ◆ Hasonlóképpen feltesszük, hogy elegendő csak a felhajtóerőt tekinteni, a légellenállás elhanyagolható.
- ◆ Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az „FRL” vonal (a törzs építési vízszintese - Fuselage Reference Line) és a deformálatlan szárny nulla felhajtóerő iránya („ $c_L = 0$ ” irány) egybeesik, vagyis ilyenkor a törzs állásszöge és a szárny állásszöge azonos; ezért, a következőkben az  $\alpha_{törzs}$  a szárny elcsavarodás nélküli és a törzs állásszögét egyaránt jelenti.
- ◆ Végre feltesszük azt is, hogy a szögelfordulások kicsik. Ezek az elhanyagolások egy oktatási jellegű munkában megengedhetőek.

Az I.2. ábrán látható, a szárnyat jellemző szárnymetszet a törzs alapvonalhoz („FRL”) képest, a rá ható nyomatékok következtében  $\vartheta$  rugalmas elcsavarodási szöggel fordul el. Így az eredő állásszög a nulla felhajtóerő irányhoz („ $c_L = 0 \Rightarrow ZLL$ ” – Zero Lift Line) viszonyítva:

$$\alpha_{Teljes} = \alpha_{törzs} + \vartheta; \quad (I.1)$$

A 2. ábrán egyébként minden szöget a pozitív elfordulás irányban rajzoltunk fel. Természetesen, az ebben az értelemben fogató nyomatékok a pozitívak. A  $h$  a teljes

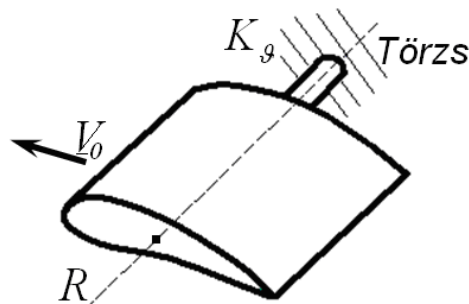


húrhosszat, a  $h_k$  a kormánylap húrhosszát jelöli. Az „R” pont a rugalmas tengely helye. A rugalmas tengely és az „AC” távolságát, a szokásnak megfelelően az  $eh$  szorzat formában adjuk meg. Végül a kormánylap kitérítési szögét  $\delta_k$ -val jelöltük.

### I.1.1. A divergencia

A divergencia vizsgálatakor a kormánylapot a szárnyhoz mereven rögzítettnek képzeljük – ezért az I.3. ábrán a kormánylapot fel sem tüntettük.

Vizsgáljuk az I.3. ábrán látható, egyszerű modellt, ahol egy tökéletesen merev, téglalap alaprajzú szárny egy csavaró rugóval (ennek rugó állandója  $K_\vartheta$ ) csatlakozik a törzshöz. A csavarás tengelye az „R”, rugalmas tengely. A következőkben feltételezzük, hogy a divergencia során fellépő elcsavarodás kizárólag a csavaró rugón jön létre. Ez ismét egy oktatási modell, azonban egy valóságos szárny minden további nélkül felosztható csavaró rugóval egymáshoz kapcsolt, rövid, merev szárnydarabokra. Ezen a módon már a gyakorlatban is használható modellhez juthatunk.



I.3. ábra: Divergencia-modell

Feltételezzük, hogy a divergencia kifejlődése során a felhajtó erő egyenlő az erre a szárnydarabra jutó súlyerővel ( $G_w$ ). A vonatkozó szakirodalomban általában, szélcsatorna modellt vizsgálnak, ahol a súlyerő nem játszik szerepet. Az itt választott kiindulás azért indokolt, mert ez a mód az, ahogyan a tényleges, repülés közben lejátszódó folyamatot figyelemmel lehet kísérni, miközben az itt kapott matematikai modelltől a szakirodalomban levezetett eredmény is származtatható (pl. I.5 kifejezés). Vizsgáljuk tehát – különböző repülési sebességeken – a függőleges egyensúlyt:

$$L = \frac{\rho}{2} V_0^2 A c_L = \frac{\rho}{2} V_0^2 A c_L^\alpha \alpha_{Teljes} = \frac{\rho}{2} V_0^2 A c_L^\alpha (\alpha_{törzs} + \vartheta) = G_w ; \quad (I.2)$$

ahol:  $A$  – a szárnyfelület ;

$$c_L^\alpha = \partial c_L / \partial \alpha ;$$

Az (I.2) felírásakor feltettük, hogy a felhajtóerő tényező a felhajtóerő tényező iránytangense valamint az állásszög szorzataként számítható, vagyis a lineáris tartományban dolgozunk. Ezt a feltételt ugyan végig megtartjuk, azonban a javasolt, numerikus eljárás – ha szükséges – könnyen kiterjeszthető a nemlineáris tartományokra is.

Írjuk fel az I.3. ábrán látható szárnyra ható (teljes) csavaró nyomatékokat (melyek eredője nulla, hiszen aperiodikus jelenséget vizsgálunk):

$$M_T = L \cdot (eh) + M_{AC} - K_\vartheta \vartheta = 0; \quad (I.3)$$

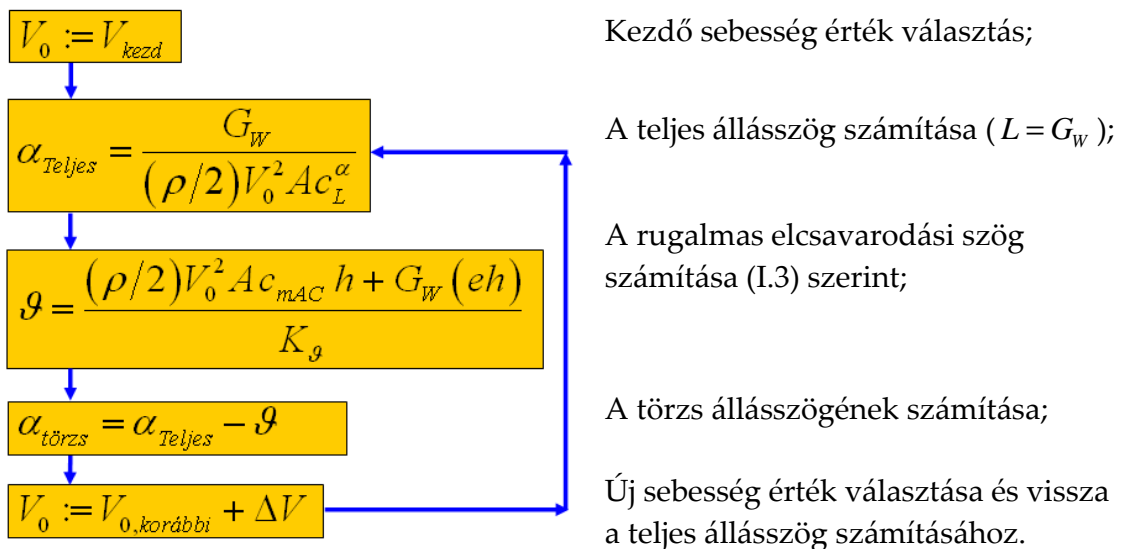
$$\text{ahol: } M_{AC} = \frac{\rho}{2} V_0^2 A h c_{mAC};$$

Az (I.3) kifejezésben a rugalmas elcsavarodási nyomatékot negatív előjellel írtuk be, mivel az reakció nyomaték! Ezt a tagot pozitív előjellel a jobb oldalra írva, (I.3) fizikailag azt jelenti, hogy az aerodinamikai nyomatékokkal a rugalmas elcsavarodásból származó nyomaték tart egyensúlyt.

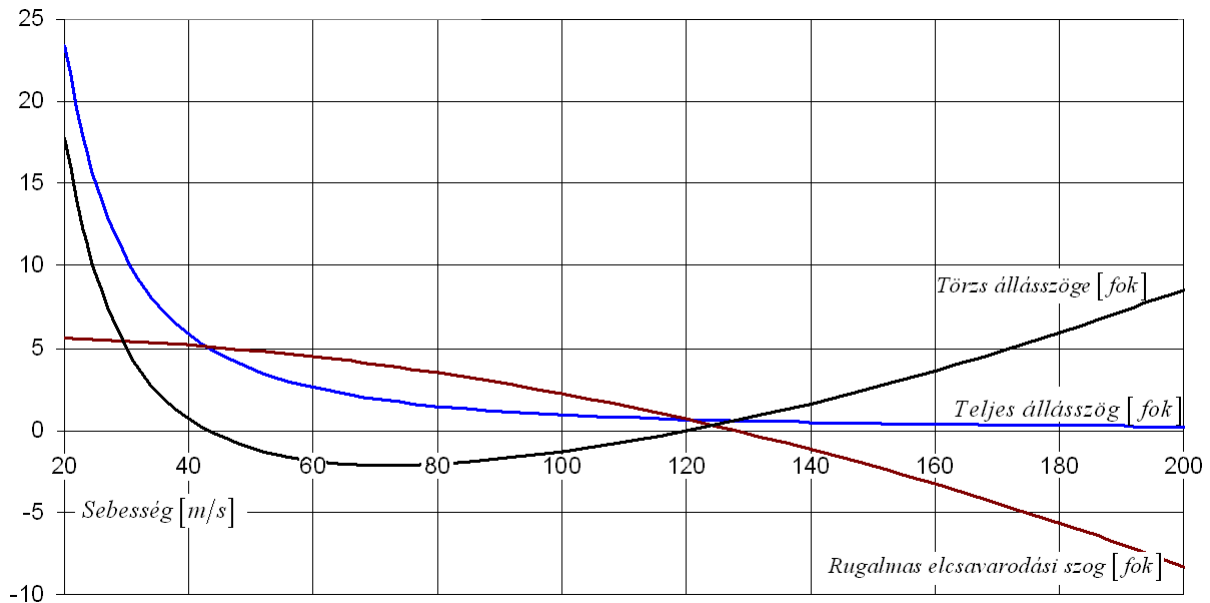
A divergencia folyamata azt jelenti, hogy a vizsgált szárny-modell a sebesség növekedésével a törzshöz képest elcsavarodik – az ennek során létrejövő jelenségeket egy konkrét példán mutatjuk be. Ez csak egy példa ugyan, de az eredmények általánosan is jellemzőek.

Legyen a levegő sűrűsége:  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ , a szárnyfelület:  $A = 10 \text{ m}^2$ , a szárnydarabra vonatkozó felhajtóerő tényező iránytangens:  $c_L^\alpha = 5$ , a szárny húr hossza:  $h = 1 \text{ m}$ , az AC-R távolság:  $eh = 0.2$ , az aerodinamikai centrumra vonatkozó nyomatéki tényező:  $c_{mAC} = -0.1$ , a csavaró rugó állandója:  $K_\vartheta = 10000 \text{ Nm/rad}$ .  $G_W = 5000 \text{ [N]}$  és feltételezzük, hogy  $L = G_W$ , azaz, amint már korábban is említettük, a felhajtó erő és a súlyerő egyenlő. (Az aperiodikus aeroelasztikus jelenségek esetében a gyorsulások gyakorlatilag nullának vehetők, így erő- és nyomatéki egyensúlynak kell lennie.)

A divergencia példa-számítást végezzük a következő, vázlatos séma szerint:



A példa-számítás eredményeképpen megkapjuk a teljes állásszög, a rugalmas elcsavarodási szög és a törzs állásszögének változását a repülési sebesség függvényében (I.4. ábra):



I.4. ábra: A divergencia folyamata

A ábráról leolvashatók a divergencia kifejlődésének fázisai:

- ➡ a sebesség növekedésével a teljes állásszög (hiperbolikusan) csökken;
- ➡ szintén a sebesség növekedésével a rugalmas elcsavarodási szög szigorúan monoton csökken (azaz egyre nagyobb abszolút értékű, negatív értékeket vesz fel);
- ➡ a törzs állásszöge először csökken, majd egy legkisebb érték elérése után (kb. 72 m/s sebesség átlépése után) növekszik.

A rugalmas elcsavarodási szöget a számítási séma szerinti harmadik lépésben határoztuk meg. A tört számlálójának második tagja pozitív, állandó, ezzel szemben a számláló első tagja (ha  $c_{mAC}$  negatív) a sebesség négyzetével csökken (az abszolút értéke növekszik). A törzs állásszögét ( $\alpha_{\text{törzs}}$ ) a séma negyedik lépése szerinti kivonással számoljuk, ezért alakul ez az állásszög a fenti módon.

A divergencia kifejlődése során tehát, a sebesség növekedésével a teljes állásszög csökken, úgy, ahogyan ezt a felhajtóerő és a súlyerő egyenlőségi feltétele előírja. A rugalmas elcsavarodási szög egy pozitív értékről indul és egyre kisebb lesz – vagyis a szárny a törzshöz képes először felfele csavarodni el, majd a sebesség növekedésével ez az elcsavarodás csökken, illetve kb. 130 m/s-tól ellenkező értelműre fordul. Ez azt jelenti, hogy a törzsorr a szárnyhoz képest – növekvő sebesség esetén – egyre magasabbra emelkedik.

Ezzel elérkeztünk a szárny-divergencia lényegéhez: a repülőgép viselkedése a kb. 72 m/s-os sebességnél megváltozik, úgy, hogy a botkormány előrenyomásával, illetve a sebesség növelésével a repülőgép orra emelkedik, ahelyett, hogy a megszokott módon lefele mozdulna. Ilyenkor a botkormány további előrenyomásával éppen nem lehet a törzs orrát „lenyomni”, hanem az tovább emelkedik, miközben a szárny törzshöz képesti elcsavarodási szöge nő – vagyis ilyenkor a horizont szerinti vezetés, túlzott kormány

előrenyomás esetén akár a szárny lecsavarodását is előidézhetheti. Ugyanakkor, az a repülőgép vezető, aki tisztában van ezzel a jelenséggel, ezt a problémát könnyen el tudja kerülni.

A példa nyomán megállapítható az is, hogy a vizsgált szárny törzshöz képesti elcsavarodási szöge pl. a 40 és 80 m/s-os sebesség között kb. 5 fokról kb. 3.5 fokra módosul. Vagyis a rugalmas elcsavarodás következtében a szárny törzshöz képesti helyzete és ezzel a szárny és a vízszintes vezérsík egymáshoz viszonyított beállítási szöge is, *változik* a repülési sebesség függvényében!

A szakirodalomban divergencia sebességnek nevezik azt a határ sebességet, amit úgy állapítanak meg, hogy e sebesség túl nem lépése esetén a divergencia biztosan nem okoz problémát. Az I.4. ábra alapján azt mondhatjuk, hogy ennél a modellenél a divergencia pl. 200 m/s-os sebességig nem okoz jelentős, törésveszélyes deformációt. De konkrét határnak kitűzhetjük a 72 m/s-os sebességet, amely sebességig a repülő a botkormány kitérésre a megszokott módon reagál.

A fentiekkel kissé ellentétben pl. [16]-ban a divergencia sebességet más úton határozzák meg. E módszer szerint kiszámítjuk (I.3) rugalmas elcsavarodási szög szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial M_T}{\partial \vartheta} = \frac{\rho}{2} V_0^2 A c_L^\alpha (eh) - K_\vartheta; \quad (I.4)$$

A deriválásakor az „AC”-re vonatkozó nyomaték kiesik, mert azt állandónak vesszük, tehát csak a felhajtóerő nyomaték-deriváltja (ez pozitív és a sebesség négyzetével arányos), illetve a rugalmas reakció nyomaték deriváltja (ez negatív és állandó) marad a kifejezésben. A csavaró nyomaték deriváltja segítségével egyfajta stabilitást értelmezhetünk: a nyomatékok rugalmas elcsavarodási szög szerinti változása addig stabil, amíg a fenti derivált negatív, illetve elérünk egy sebességet (ez az elméleti divergencia sebességnek nevezett sebesség), amikor a derivált értéke nulla lesz:

$$V_{DELM} = \sqrt{\frac{2K_\vartheta}{\rho A c_L^\alpha (eh)}}; \quad (I.5)$$

E felett a sebesség felett a derivált értéke pozitív, tehát az elcsavarodási szög változásával az aerodinamikai nyomaték gyorsabban nő, mint a rugalmas reakció nyomaték. A példa adataival számolva ez, az elméleti divergencia sebesség kb. 40 m/s-ra adódik.

Ez, véleményünk szerint indokolatlanul szigorú korlát. További probléma, hogy az (I.5) képletből úgy látszik: ha  $(eh)=0$ , akkor az elméleti divergencia sebesség végtelen, ha pedig negatív, akkor komplex – tehát a valóságban elő nem forduló – értéket kapunk. Ezzel szemben, a kidolgozott példából kitűnik, hogy az  $(eh)$  távolság fenti értelmű változásával a „Rugalmas elcsavarodási szög” elnevezésű görbe lefele mozdul el. Emiatt csökken a törzs viselkedés-változásához rendelhető sebesség, illetve abszolút értelemben

növekszik a rugalmas elcsavarodási szög (vagyis az esetleges lecsavarodás kisebb sebességnél következik be). Végeredményben tehát az  $(eh)$  távolság csökkentése ebből a szempontból egyáltalán nem kívánatos.

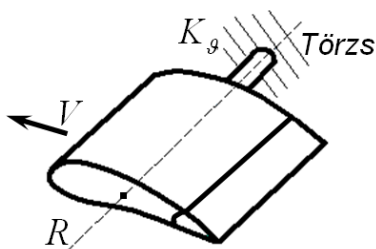
Az elméleti divergencia sebesség mellett bevezetik a gyakorlati divergencia sebességet is. Vizsgáljuk meg a [16]-ban található kifejezést. Tegyük fel, hogy a legnagyobb, megengedhető elcsavarodás értéke  $\vartheta_B$ . A gyakorlati divergencia sebességet (I.3) -ből fejezzük ki:

$$V_{DGYAK} = \sqrt{\frac{2K_\vartheta \vartheta_B}{\rho Ah [c_{mAC} + c_L^\alpha e(\alpha_{i\ddot{o}rzs} + \vartheta_B)]}}; \quad (I.6)$$

Az (I.6) kifejezésben a legnagyobb megengedhető elcsavarodási szög ( $\vartheta_B$ ) értéke ismert, de az állásszög ( $\alpha_{i\ddot{o}rzs}$ ) a [16] szerint szabad paraméter. Illetve [16] az állásszöget kezdeti állásszögnek nevezi és vizsgálja, hogy különböző kezdeti állásszögek választásától hogyan függ a divergencia sebesség. Az általunk bevezetett, numerikus vizsgálat esetén teljesítendő a súlyerő = felhajtóerő feltétel. Amennyiben ezt a feltételt a (I.6) kifejezésnél figyelembe vesszük, akkor a numerikus eljárással kapottal azonos eredményre jutunk.

### I.1.2. A reverzálás

A reverzálás az az aperiodikus (tehát „lassan” kialakuló) jelenség, amelynek során egy kormánylap a kitérítése következtében olyan rugalmas elcsavarodást idéz elő, hogy a szárny-kormánylap együttesen végeredményben nem változik meg a felhajtóerő. Vagyis ilyenkor a kormánylap hatástalanná válik. Ezt nyilván el kell kerülni, a repülési sebességet úgy kell korlátozni, hogy a kormánylapok hatásossága valamilyen, előírt (minimális) mértékben megmaradjon.



I.5. ábra: Reverzálás-modell

A reverzálás jelenségének vizsgálatához a divergencia elemzésénél használt modellt (I.3. ábra) egy kormányfelülettel egészítjük ki, melynek geometriai jellemzőit az I.2. ábrán már feltüntettük.

A felhajtóerőt – amennyiben a kormány kitérítését is számításba vesszük, az alábbi, (I.2)-höz képest bővített formában kell felírni:

$$L = \frac{\rho}{2} V_0^2 A c_L = \frac{\rho}{2} V_0^2 A (c_L^\alpha \alpha_{Teljes} + c_L^\delta \delta) = \frac{\rho}{2} V_0^2 A [c_L^\alpha (\alpha_{i\ddot{o}rzs} + \vartheta) + c_L^\delta \delta_K]; \quad (I.7)$$

ahol:  $c_L^\delta = \partial c_L / \partial \delta_K$ ;

A nyomaték számítása esetén a kormánykitérés hatását hasonló módon kell figyelembe venni:

$$M_T = L(eh) + M_{AC} - K_\vartheta \vartheta = 0; \quad (I.8)$$

$$\text{ahol: } M_{AC} = \frac{\rho}{2} V_0^2 Ah (c_{mAC} + c_{mAC}^\delta \delta_K) \quad \text{és: } c_{mAC}^\delta = \partial c_{mAC} / \partial \delta_K;$$

A reverzálási sebesség számítása során azt a sebességet keressük, ahol a keletkező felhajtó erő, a kormánykitérés hatására nem változik:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_K} = \frac{\rho}{2} V_0^2 A \left[ c_L^\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial \delta_K} + \frac{\partial c_L}{\partial \delta_K} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial \delta_K} = -\frac{1}{c_L^\alpha} \frac{\partial c_L}{\partial \delta_K}; \quad (I.9)$$

Az (I.9) egyenlet felírásakor egy további lépést is tettünk: az erő meg nem változását kifejező nulla értékű derivált képletéből kiszámítottuk a rugalmas elcsavarodási szögnek a vizsgált esetbeli deriváltját. Fontos megjegyezni, hogy a fenti kifejezések igaz voltához a modell linearitása szükséges feltétel.

A reverzálás folyamatában az eredő rugalmas nyomaték nulla, ezért a rugalmas nyomaték kormánykitérés szerinti deriváltja is nulla:

$$M_T = \frac{\rho}{2} V_0^2 A \left( c_L^\alpha (\alpha_{\text{örzs}} + \vartheta) + \frac{\partial c_L}{\partial \delta_K} \delta_K \right) eh +$$

$$+ \frac{\rho}{2} V_0^2 Ah \left( c_{mAC} + \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \delta_K} \delta_K \right) - K_\vartheta \vartheta = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_T}{\partial \delta_K} = 0; \quad (I.10)$$

A fent jelzett derivált kiszámításakor vegyük figyelembe, hogy az (I.10) első sorában a felhajtóerő szerepel, illetve a felhajtóerő nyomatékának deriváltja (I.9) szerint nulla. Így elegendő a második sor deriváltját kiszámolni; innen már könnyen megkapható a reverzálási sebesség:

$$\frac{\partial M_T}{\partial \delta_K} = \frac{\rho}{2} V_0^2 Ah c_{mAC}^\delta - K_\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \delta_K} = 0 \Rightarrow V_R = \sqrt{-\frac{2 K_\vartheta c_L^\delta}{\rho Ah c_L^\alpha c_{mAC}^\delta}}; \quad \left( c_{mAC}^\delta = \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \delta_K} \right) \quad (I.11)$$

A négyzetgyök alatti kifejezés előjele negatív, ez éppen megfelel annak a ténynek, ami szerint a legtöbb esetben  $c_{mAC}^\delta < 0$  negatív, ezzel valós reverzálási sebességet kapunk. Nyilvánvaló, hogy az ebből a szempontból megengedhető legnagyobb repülési sebesség ennél a sebességnek csak kisebb lehet. (Annyival kisebb, hogy a kormányhatásosság még elfogadható legyen.)

Folytassuk a divergencia számításánál megkezdett számpéldát. Legyen a kormánylap húr hossza a teljes húr hossz 20 %-a – illetve rendeljük ehhez a  $c_L^\delta = 1.36$ , illetve a  $c_{mAC}^\delta = -0.3$  értéket. Ezekkel a számértékekkel kiszámolható az (I.11) szerinti reverzálási sebesség:

$$V_R \cong 38.5 \text{ m/s};$$

A számpélda adatainak megválasztásakor egyébként első sorban a szemléletességre törekedtünk, a valóságos repülőgépek tényleges adatainak figyelembe vétele esetén az itt közölttől – természetesen – különböző eredményt kapunk.

Az aperiodikus – néha statikusnak is nevezett – aeroelasztikus jelenségek a divergencián és a reverzálon túl, további hatásokat is előidéznek. A különböző deformációk – főként az elcsavarodások – következtében megváltozik például a szárny és a vízszintes vezérsík egymáshoz viszonyított beállítási szöge és ezzel megváltozik a trimmhelyzet. Ez, egyes esetekben komoly problémához, akár veszélyhelyzethez is vezethet.

## II. Az instacioneritás és hatása

Az aerodinamikai feladatoknak a gyakorlat igényeinek megfelelő megoldása során viszonylag ritkán fordul elő az időben változó áramlás hatásainak figyelembe vétele, jóllehet a legtöbb, valóságos viszonyok között működő repülőgép körül időben változó áramlás alakul ki, miközben maga a szerkezet is változtatja az alakját. Ennek oka első sorban az, hogy az időben változó – instacionárius – áramlás hatásai nagyon sok esetben kicsik, elhanyagolhatók. Másodsorban azonban szerepet játszik az is, hogy az instacionárius aerodinamika feladatainak igényes megoldása igen bonyolult.

Legyen az instacioneritás legalább pillanatnyilag  $\omega$  körfrekvenciájú változással közelíthető, akkor, a szakirodalom nyomán egy dimenziótlan körfrekvenciát definiálhatunk:

$$k = \frac{\omega h}{2V_0} = \begin{cases} 0 \leq k \leq 0.05 & \Rightarrow \text{kvázi-stacionárius}; \\ 0.05 < k \leq 0.2 & \Rightarrow \text{instacionárius}; \\ 0.2 < k & \Rightarrow \text{erősen instacionárius}; \end{cases}$$

A dimenziótlan körfrekvencia tehát – legalább a fenti, egyszerű esetben – tájékoztatást ad arról, hogy mely esetben, milyen mélységű számítást kell alkalmaznunk. A *kvázi-stacionárius* eset a legegyszerűbb, ekkor megelégedhetünk a közvetlen belátás alapján álló, egyszerű számítások elvégzésével. A tapasztalatok azt mutatják, hogy a repülőgépek esetében leggyakrabban ez, a kvázi stacionárius eset fordul elő.

A második, az *instacionárius* esetben a teljes folyamat vizsgálata és figyelembe vétele szükséges – például, ebben az esetben elengedhetetlen a megváltozó felhajtóerő miatt megváltozó örvényrendszer hatásának vizsgálata. A legtöbb esetben ide sorolható például a repülőgépszárny flutter vagy a forgószárnyas repülőgépek szárnyai körül kialakuló áramlás számítása.

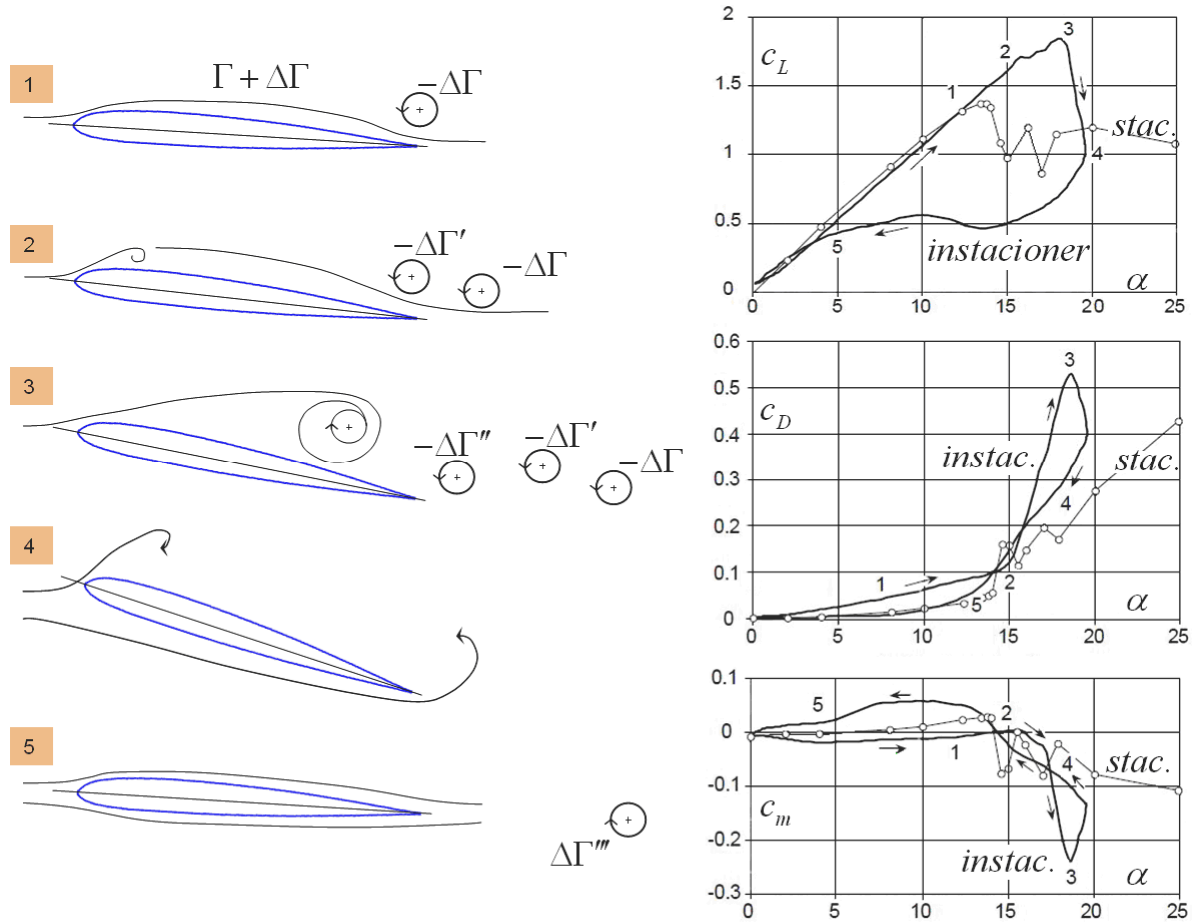
A harmadik, *erősen instacionárius*-nak nevezett esetben pedig minden hatás hangsúlyozottan fontos, ezek lehető legpontosabb vizsgálatára van szükség.

Az instacionárius aerodinamika problémakörét vizsgálhatjuk lineáris (linearizált) formában és nemlineáris esetben is. A gyakorlati esetek többségében elegendő, ezért megengedhető a lineáris modellek alkalmazása.

A nemlineáris, erősen instacionárius esetre példaként vizsgáljuk meg a *dinamikus átesés* jelenségét. Megjegyzendő, hogy a II.1 ábrán csak jellegre helyes görbék láthatók.

A példaként tekintett esetben egy szárnyprofil stacionárius (vékony vonal körökkel) és egy, konkrét instacionárius (vastagabb, folytonos vonal) folyamathoz rendelt felhajtóerő tényező, ellenállás tényező és nyomatéki tényező – állásszög jelleggörbéje látható. Az instacionárius viselkedést mutató példában a profil egy közép állásszög körül, harmonikus csavarodó mozgást végez.





II.1. ábra: Dinamikus átesés

Dinamikus átesésnek azért nevezzük a fenti folyamatot, mert az időben változó áramlásban előálló hatások miatt a felhajtóerő tényező maximuma jelentősen a stacionárius maximum fölé nő, miközben a kritikus állásszög értéke is jelentősen megnövekszik (II.1. ábra, jobbra fent).

A II.1. ábra-sorozaton, az instacionárius görbéken öt pontot jelöltünk meg. Ezen pontok, illetve a köztük lévő szakaszok jellemzésével követhetjük nyomon az vizsgált folyamatot. Induljunk a körülbelül nulla fokos állásszögtől és tartsunk az 1-es pont felé. Ekkor a felhajtóerő növekedésével arányosan növekszik a profil körüli cirkuláció, amire az ábrán (balra fent) a „ $\Gamma + \Delta\Gamma$ ” felírással utaltunk. A perdület megmaradás elvének értelmében a megnövekvő hordozó örvény változásával ellentétesen „ $-\Delta\Gamma$ ” változási örvény úszik le.

A változási örvény és a hordozó örvény változásának összege nulla, ez rögtön belátható! Illetve, a változási örvény előtti negatív előjel azt mutatja, hogy a változási örvény forgásiránya – az ábrán jelölt irány – ellentétes a hordozó örvény változását jelentő örvény forgásirányával. Ez a változási örvény forgásirány pedig mintegy rásimítja az áramlást a profil kilépő élére, ezzel a leválást – egy ideig – megakadályozza. Az 1-es pont általában nincsen túl távol a stacionárius görbétől.

Közbevetve megjegyezzük, hogy a hordozó örvény kötött örvény – a profilhoz van kötve, és akkor és csak akkor létezik, ha létezik aerodinamikus felhajtóerő. A változási örvény viszont szabad örvény – erőmentes örvénynek is nevezzük – létezése a kötött örvény változásához kötött. A szabad örvény együtt mozog azzal az áramlással, amiben keletkezett. Azonban mindkét örvénytípus körül kialakul az örvények indukált sebesség-mezeje, ami az áramlási sebességteret módosítja.

A 2-es pont, a felhajtóerő szempontjából már jelentősen a stacionárius görbe felett van. Ekkor, mivel a felhajtóerő még mindig nő, további változási örvény ( $-\Delta\Gamma'$ ) úszik le a profilról. A változási örvény a vizsgált folyamatban valójában folyamatosan úszik le, a diszkrét örvények közelítések, alapvetően az ábrázolás kedvéért kerültek a képekre.

A 2-es pont környezetében a leúszó változási örvények továbbra is rásimítják az áramlást a kilépőélre, viszont mivel már viszonylag messze a stacionárius áramlásban érvényes leválási állásszög felett járunk, azért a profil elején buborék leválás indul meg. A buborék leválás miatt megváltozó nyomáseloszlás következtében módosul a légerő hatásvonalja és ezzel erős nyomaték (nyomatéki tényező) változás indul meg. A szakirodalomban ezt nyomaték-átesésnek nevezik.

Az állásszög további növelésével érjük el a 3-as pontot. Eddig a felhajtóerő is nő, ennek megfelelően újabb változási örvény ( $-\Delta\Gamma''$ ) úszik le, illetve az ábra szerint ez lesz a felhajtóerő tényező legnagyobb értéke. Eddigre azonban a belépőél átesés következtében a profil felett előálló örvény megerősödik és létrehozza a leválást. A 3-as pontban, a nyomatéki tényező megnövekedett abszolút értéke mellett a légellenállás is jelentősen nagyobbra adódik, mint a stacionárius érték.

A 3-as ponttól a 4-es pontig tartó szakaszon igen durva átesés – felhajtóerő csökkenés következik be. A felhajtóerő kisebb lesz, mint a stacionárius érték. Eközben az ellenállás és a nyomaték abszolút értéke is csökken. E két jellemző közeledik a stacionárius értékhez.

A 4-es pont után, az 5-ös pont felé az áramlás visszasimul a profilra. A felhajtóerő csökkenése miatt errefelé is úsznak le a profilról változási örvények (pl.  $\Delta\Gamma'''$ ) – ezek forgásiránya, a felhajtóerő csökkenése miatt ellentétes a korábbi változási örvények forgásirányával. A csökkenés mértéke azonban csekély, így ezen változási örvények nagysága és hatása is korlátozott.

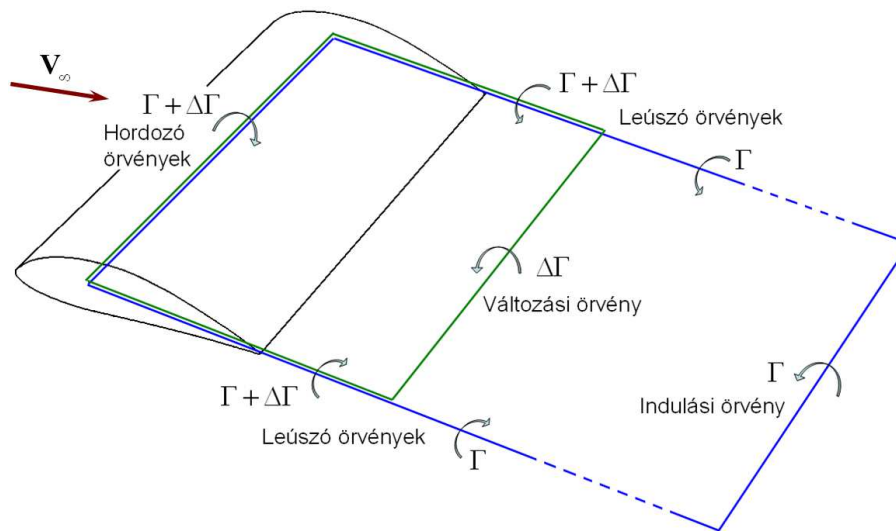
A dinamikus átesés (a jelentősége nagy lehet a forgószárnyak esetében – nem csak a szélkerekeknél, de a helikopterek és az autogírók rotorlapátjainál is). Ez a jelenség a számtalan, lehetséges instacionárius folyamat közül csak egy példa volt.

Az időben változó áramlások mellett instacioneritást jelent a profil (a forgószárny) időben változó mozgása is. (A dinamikus átesést éppen egy ilyen esetre mutattuk be.) Az áramlások változása különböző lehet (például a légköri turbulencia, vagy egy éppen bekövetkező szélváltás stb.), de a szárnyak mozgása is legalább kétféle (elmozdulás jellegű – pl. csapkodás és elfordulás jellegű – pl. beállítási szög változtatás, változás) lehet.

Az instacioneritások vizsgálata azért is nehéz, mert a profil (szárny, forgószárny) körüli eredő áramképet általában jelentősen befolyásolják a korábbi pillanatokban keletkezett leúszó örvények. Ez pedig azt jelenti, hogy az adott pillanatbeli áramlás vizsgálatához a korábbi áramképeket is fel kell használni – azaz figyelembe kell venni az áramlás (a folyamat) történetét. Ezt, sok esetben csak korszerű, CFD módszerek alkalmazásával lehet számításba venni – jóllehet a feladatok bonyolultsága miatt e módszerek alkalmazása is sok problémával jár. Az instacioneritásról bővebben például [10]-ben lehet olvasni.

Vizsgáljuk meg az instacionárius aerodinamikában jelentős szerepet játszó hatásokat:

- a cirkulációs hatások jelenségek;
- a tehetetlenségi hatások;
- a határréteg hatások
- a változási front mozgásából következő hatás.

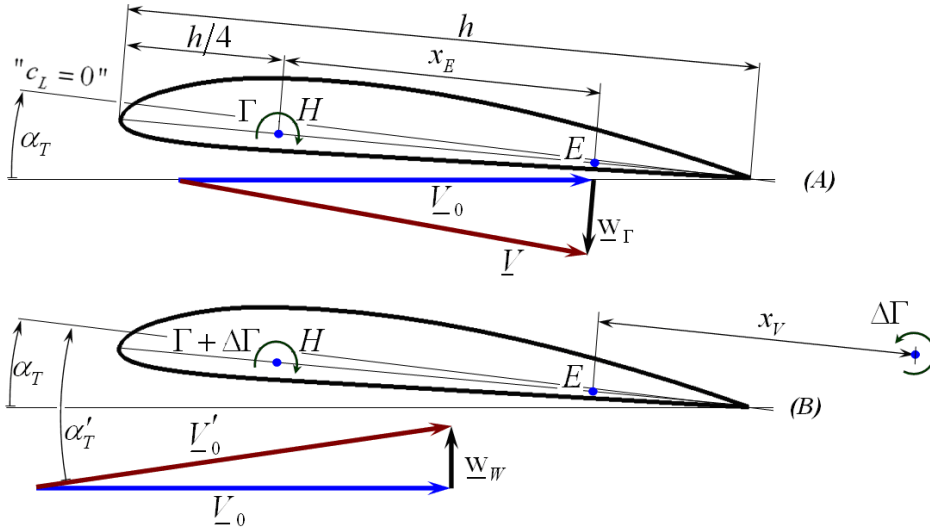


II.2. ábra: Szárny leegyszerűsített örvény-rendszere

A cirkuláció változásának hatását vizsgálva induljunk ki egy nagyon leegyszerűsített helyzetből: tekintsük adottnak a II.2. ábrán látható hordozó örvény, leúszó örvények és az indulási örvény által alkotott örvény-négyszöget (tulajdonképpen örvénygyűrűt). Az indulási örvényt csak a rend kedvéért említjük, illetve tüntetjük fel: ez az örvény a gyakorlatban a szárnytól olyan messzire van, hogy a léte csak elméletileg fontos. Amennyiben valamely ok folytán (pl. szárny elmozdulása, elfordulása, állásszög növekedés stb.) megváltozik a felhajtóerő, akkor a már eredetileg jelen lévő hordozó örvény erőssége  $\Delta\Gamma$ -val megváltozik. Ennek megfelelően változik a két leúszó örvény is és az örvénygyűrűt a *változási örvény* zárja be, amelynek az erőssége szintén (kötelezően)  $\Delta\Gamma$ . Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez a változás ugrásszerű, vagyis nulla idő alatt következik be, méghozzá a II.3. (B) ábrán vázolt módon, vagyis egy hirtelen fellépett lefele irányuló szárnymozgás ( $\underline{w}_w$ ) miatt.

A leúszó és a változási örvény un. *szabad örvény*, ami azt jelenti, hogy ezek az örvények a környező levegővel együtt mozognak. Ezeket a repülés sebességével és a szárny mögötti indukált sebességgel mozgó légáramlás viszi magával – vagyis a

változási örvény (az indulási örvényhez hasonlóan) távolodik a szárnytól, a hatása ezért az idő múlásával csökken. A keletkezés pillanatában a változási örvény által indukált sebesség pontosan akkora, hogy a megváltozás hatását éppen kiegyenlítse. Zárójelben jegyezzük meg, hogy más esetekben más, a gyakorlati tapasztalatokon alapuló kezdeti feltételt alkalmaznak.



II.3. ábra: Szárnyprofil vizsgálata

Tegyük fel, hogy a II.3 ábrán látható módon, a sebesség megváltozása miatt ( $\underline{w}_w \Rightarrow \underline{V}'_0$ ) a profil körüli cirkuláció megnő. Ekkor, a perdület megmaradás értelmében a megnövekvő cirkuláció ( $\Gamma + \Delta\Gamma$ ) mellett létrejön a növekménnyel ellentétes változási örvény ( $\Delta\Gamma$  előjeles, itt egy negatív szám!), amelyet a profil utáni áramlás magával visz. Kérdés, hogy a  $t = 0$  pillanatban hol keletkezik a változási örvény?

A II.3. ábrán „H”-val a hordozó örvény helyét (erről feltesszük, hogy a húr első negyedén van) és „E”-vel az ellenőrző pont helyét jelöljük (itt számítjuk a  $\underline{w}_\Gamma$  indukált sebességet). Az örvényelméletben alkalmazott eljárás szerint számítsuk ki a hordozó és az ellenőrző pont távolságát.

Kis szögek esetén jó közelítéssel írható, hogy a hordozó örvény megváltozásának hatására bekövetkező állásszög változás:

$$\Delta\alpha \cong \frac{\Delta w_\Gamma}{V_0} = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi x_E V_0}; \quad (II.1)$$

Az állásszög, illetve állásszög változás valamint a cirkuláció(változás) közötti összefüggést – lineáris esetben – a Kutta-Zsukvszkij tétel szerint fogalmazhatjuk meg:

$$\frac{\rho}{2} V_\infty^2 c_L^\alpha \alpha h = \rho V_0 \Gamma \Rightarrow \alpha = \frac{2\Gamma}{V_0 c_L^\alpha h}; \quad \Delta\alpha = \frac{2\Delta\Gamma}{V_0 c_L^\alpha h}; \quad (II.2)$$

A két állásszög változást – a fent kimondott feltétel szerint – egyenlővé téve kapjuk a keresett távolságot:

$$\Delta\alpha = \frac{2\Delta\Gamma}{V_0 c_L^\alpha h} = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi x_E V_0} \Rightarrow x_E = \frac{c_L^\alpha h}{2 \cdot 2\pi}; \quad (\text{II.3})$$

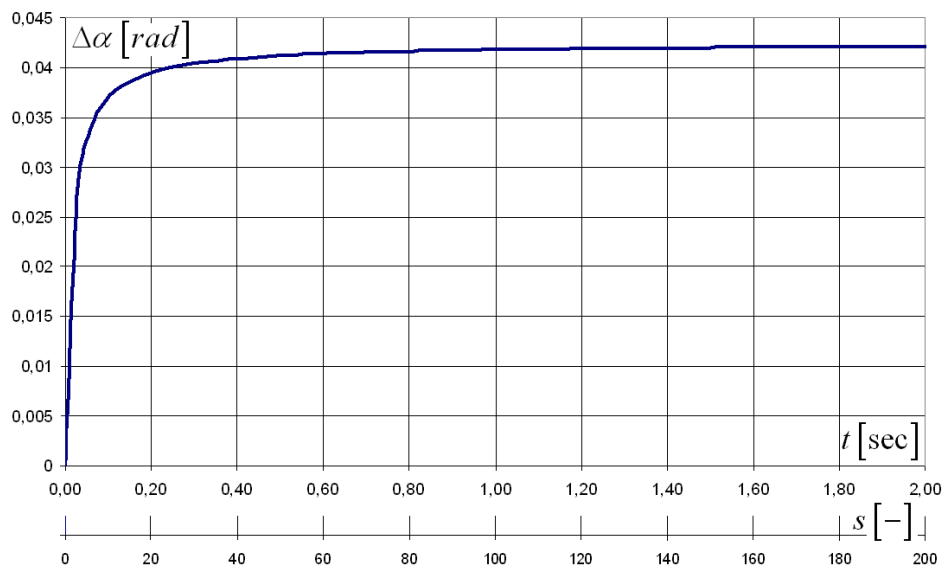
A változási örvény keletkezésének helyét ( $x_v$ ) abból a feltételből számíthatjuk ki, hogy a  $t=0$  pillanatban a felhajtóerő megváltozása pont nulla. Mivel a hordozó örvény megváltozásától a változási örvény csak az előjelében különbözik, azért a változási örvény az ellenőrző pont másik oldalán, a pont mögött, a hordozó pontéval azonos távolságban kell, hogy elhelyezkedjen [II.3.(B) ábra]:

$$x_v = x_E; \quad (\text{II.4})$$

A leúszó, változási örvény hatását egy nagyon egyszerű számpéldán mutatjuk be. Legyen a repülési sebesség 50 [m/s], a húrhossz 1 [m] és a cirkuláció változás 10 [m<sup>2</sup>/s], ami egy 2.122 [m/s]-os szárny lefele-mozgás miatt áll elő.

A tényleges állásszög változás, az idő függvényeként, a szárny mozgásából ( $\Delta\alpha_w$ ) és a változási örvény által indukált sebesség okozta állásszög változás ( $\Delta\alpha_\Gamma$ ) összegeként számítható. A változási örvény – szabad örvény – távolsága, mivel a közeg magával viszi, az idővel folyamatosan nő ( $távolság = x_v + V_0 t$ ):

$$\Delta\alpha(t) = \Delta\alpha_w + \Delta\alpha_\Gamma = \frac{w_w}{V_0} - \frac{\Delta\Gamma}{2\pi(x_v + V_0 t)}; \quad (\text{II.5})$$



II.4. ábra: A változási örvény hatása

A fenti folyamatot a II.4. ábrán a tényleges idő ( $t$ ) és egy, a szakirodalomban elterjedten használt dimenziótlan idő:  $s = 2t(V_\infty/h)$  függvényében (is) ábrázoltuk.

A  $t=0$  pillanatban a „H” pontban +10 [m<sup>2</sup>/s]-mal növekedett a hordozó örvény intenzitása és az  $x_v$ -vel jelzett helyen -10 [m<sup>2</sup>/s] változási örvény állt elő. E két hatás eredője, ebben a pillanatban nulla. Az ábrán az állásszög változást – és ezzel a felhajtóerő változását is – mutató görbe szemléletesen mutatja, hogy hogyan csökken le a változási

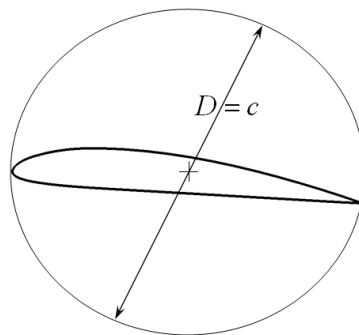
örvény hatása, vagy, másik oldalról nézve hogyan növekszik fel a felhajtóerő a lefele mozgásnak megfelelő értékre.

Fontos hangsúlyozni, hogy ez az erőváltozás nem indít újabb változási örvényt, hiszen ennek a változásnak a folyamán mind a hordozó, mind a változási örvény állandó (csak a távolságuk változik). Újabb változási örvény akkor jön létre, ha a hordozó örvény valamilyen ok miatt (ismét) megváltozik.

A dimenziótlan idő, ami a tényleges idő és a levegő részecskéinek a húr hossz felének a befutásához szükséges idő viszonyozása, mutatja, hogy az állandósult állapot a 200 körüli értéknél áll be – ez az érték jobban jellemzi ezt a folyamatot, mint a nagyjából 2 másodperc dimenziós idő. Ezt a dimenziótlan jellemzőt a későbbiekben pontosabban is definiáljuk.

A cirkulációs hatás fenti vizsgálata egy, nagyon egyszerű példán történt. A valóságban ennél csak (sokkal) összetettebb helyzetek fordulnak elő! Ezek vizsgálata elvileg az ismertetett módon lehetséges, de a gyakorlati vizsgálat általában igen bonyolult feladatra vezet. Ebből a vizsgálatból levonandó, legfontosabb következtetés az, hogy az időben változó légerő – a változási örvények keletkezése és mozgása következtében – a pillanatnyi áramlási jellemzők mellett az áramlás „történetének” is függvénye. Azt is nagyon fontos észrevenni, hogy ennek a cirkulációs hatásnak, a részhatások kifejlődéséhez, illetve lecsengéséhez egyaránt időre van szükség.

Vizsgáljuk meg a *tehetetlenségi* hatásokat. Itt csak az ún. kapcsolt tömeggel, kapcsolt statikai és tehetetlenségi nyomatékkal foglalkozunk. További tehetetlenségi hatásokat a határréteg vizsgálatánál, a határréteggel kapcsolatban említünk meg.



II.5. ábra: Kapcsolt tömeg

A kapcsolt tömeg egy aerodinamikai (hidromechanikai) segéd-fogalom. Amikor például egy szárny a levegőben mozog, gyorsul, akkor különböző mértékben vele együtt mozog, gyorsul az őt körülvevő teljes levegőtömeg is. Ehelyett, az igen kiterjedt mozgás vizsgálata helyett vezetjük be a kapcsolt tömeg (és az ezzel összefüggő, további nyomatékok) fogalmát, ami egy, pontosan határolt térrészben lévő levegőrészről szól. Ezt a térrészt úgy jelöljük ki, hogy a benne foglalt levegőtömeg hatása – a mozgó test szempontjából – legyen ekvivalens az eredeti, végtelen térben lévő levegő hatásával. Ez az ekvivalencia az esetek döntő részében persze csak közelítőleg teljesül.

Ebben a tekintetben folytatjuk az előző kérdéskör példáját. Azt mondjuk, hogy első közelítésben kapcsolt tömegnek tekinthető az a levegő tömeg, ami a szárnyprofil köré rajzolt, húr hossz átmérőjű körön belül helyezkedik el (II.5. ábra). Ezt a levegőt viszi magával a szárny, úgy, hogy a belül lévő részecskék sebessége, gyorsulása azonos a profil sebességével, gyorsulásával; és a kívül lévő levegő nyugalomban marad.

A példaként vett, 1 méteres húr hossz esetén, a levegő sűrűségét  $1.225 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ -re választva, 1 méteres terjedtséghez  $0.962 \text{ [kg]}$  tömegű levegőt kapcsolhatunk, ennyivel növelendő meg a szárnydarab tömege. Ez a hatás kis felületi terhelésű (pl. vitorlázó) repülőgépeknél jelentősebb, mint a nagy felületi terhelésű repülőgépeknél. E hatás különösen jelentős például a léghajóknál.

Az így kijelölt, kapcsolt tömeget gondolatban a szárnyhoz kapcsolva, további kapcsolt jellemzők számíthatók: a szárnyprofil valamely pontra vett statikai nyomatéka kiegészíthető a kapcsolt tömegek ugyanezen pontra vett statikai nyomatékával. Hasonlóképpen a tehetetlenségi és deviációs nyomatékok is kiegészíthetők a fenti módon.

Harmadszorra tekintsük a *határréteg* hatásait. Ezeket, összetettségük miatt csak igen nagyvonalúan vizsgálhatjuk. A határréteg viselkedésének változása miatt kell különbséget tenni a hozzááramlás megváltozása, illetve a szerkezet mozgása miatti, időben változó légerők között. Másképpen alakul a határréteg, ha például a szárny le-fel mozog (csapkod), vagy ha a rugalmas tengelye körül csavarodik. Hasonlóképpen a határréteg viselkedésének különbözősége miatt más a függőleges, illetve a vízszintes széllelés hatása.

E hatások leginkább a korszerű, numerikus módszerek alkalmazásával, illetve mérési eredmények alapján vizsgálhatók. A határréteg szerepe például a dinamikus átesésben jelentős.

A fizikai hatások közül végül a *változási front* mozgásának hatását említjük. Amennyiben egy széllelés éri a repülőgépet, akkor ennek a széllelésnek időre van szüksége ahhoz, hogy végighaladjon a gép, vagy annak egy része mellett. A cirkulációs hatásokat bemutató példában bevezetett dimenziótlan idő szerint ez az ott vizsgált szárny esetében ez az  $s = 2$  érték, ekkorra ér a változás a profil kilépő éléhez. Ez pedig azt jelenti, hogy már ahhoz is időre van szükség, hogy az új áramkép kialakuljon.

Pontosabb vizsgálatok esetén ez, különösen akkor, ha a tekintett repülőgép fizikai méretei nagyok, az időbeli eltolódás figyelembe veendő. A konkrét eljárások szerteágazósága miatt itt csak hangsúlyozhatjuk e hatások fontosságát, illetve a tényleges számítási módszerek közül néhányat a jegyzet más helyein találkozhattunk.

## II.1. Vékony profilok kvázi-stacionárius jellemzői

A vékony profilok (egyenes, illetve ívelt lap) vizsgálata ideális közeg esetén, zárt alakú összefüggésekkel lehetséges. A levezetés részleteit illetően a szakirodalomra utalhatunk csak.

Végeredményben a felhajtóerő tényező, összenyomhatatlan közeg esetére:

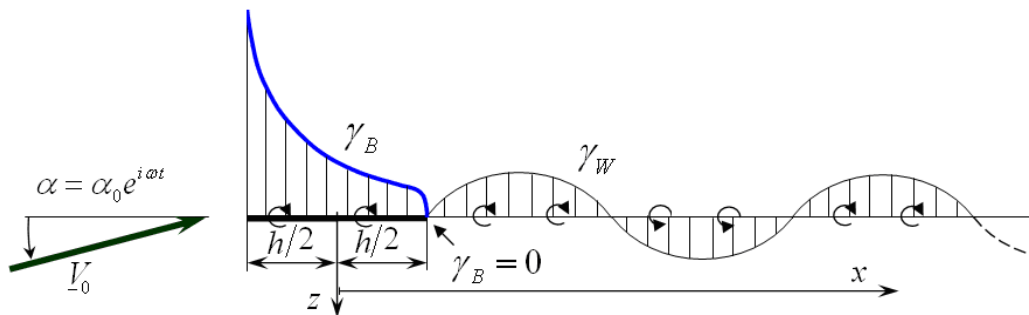
$$c_L = c_L^\alpha \left[ \alpha + \frac{w_w}{V_0} + \frac{h}{2} \left( \frac{1}{2} - x_R \right) \frac{\dot{\alpha}}{V_0} \right]; \quad (\text{II.6})$$

(II.6)-ban  $c_L^\alpha$  a felhajtóerő tényező iránytangensét (gyakran  $2\pi$ -vel közelítjük);  $w$  a szárny függőleges sebességét;  $x_R$  a rugalmas tengely és a profil felezőpontjának távolságát;  $\dot{\alpha}$  pedig a csavarodó mozgás szögsebességét jelöli. Ebben a vizsgálatban a repülési sebesség ( $V_0$ ) nem változik és a változási örvénnyel sem számolunk.

A húr hossz első negyed-pontjára vonatkoztatott (ez a „H”, hordozó pont – II.3. ábra) nyomatéki tényező kifejezése:

$$c_{m0.25} = -\frac{\pi \dot{\alpha} h}{4 2V_0}; \quad (\text{II.7})$$

A repülésben, első sorban a merevszárnyú repülőgépek vizsgálatában alapvető jelentőségű Theodorsen 1935-ben kifejlesztett számítási módszere. Ez, alapesetben egy ideális, összenyomhatatlan közegben lévő, harmonikusan változó irányból megfújtt, síklapra vonatkozik (II.6. ábra):



II.6. ábra: Örvény-eloszlás a síklapon, illetve az áramlási nyomban

A számítás alapegyenlete a megoszló örvényrendszerek ( $B$  – kötött,  $W$  – nyom) által indukált sebességre felírt integrál egyenlet:

$$w(x_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\gamma_B(x, t)}{(x - x_0)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{c/2}^{\infty} \frac{\gamma_W(x, t)}{(x - x_0)} dx; \quad (\text{II.8})$$

$$\text{ahol: } \gamma_W \left( \frac{h}{2}, t \right) = -\frac{d\Gamma(t)}{dt} \text{ és } \Gamma(t) = \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_B(x, t) dx;$$



A síkáramlásra, vagy másképpen egységnyi terjedtségre vonatkozó felhajtó erő (II.8) alapján:

$$L' = \pi \frac{\rho}{2} V_0^2 h \left[ \frac{h}{2V_0^2} \ddot{z} + \frac{h}{2V_0} \dot{\alpha} - \frac{h^2}{4V_0^2} x_R \ddot{\alpha} \right] + \pi \rho V_0^2 h \left[ \frac{\dot{z}}{V_0} + \alpha + \frac{h\dot{\alpha}}{2V_0} \left( \frac{1}{2} - x_R \right) \right] C(k); \quad (\text{II.9})$$

Az origóra (tehát a fél húrra) vonatkozó nyomaték pedig:

$$M' = -\frac{\rho h^2}{4} \left[ \pi \left( \frac{1}{2} - x_R \right) V_0 \frac{h}{2} \dot{\alpha} + \pi \frac{h^2}{4} \left( \frac{1}{8} + x_R^2 \right) \ddot{\alpha} - x_R \pi \frac{h}{2} \ddot{z} \right] + 2\pi \rho V_0 \frac{h^2}{4} \left( \frac{1}{2} + x_R \right) \left( V_0 \alpha + \dot{z} + \frac{h}{2} \left( \frac{1}{2} - x_R \right) \dot{\alpha} \right) C(k); \quad (\text{II.10})$$

(II.9) és (II.10) első tagja a kapcsolt tömegek hatását jelenti, a második tag a cirkuláció változás hatását fejezi ki. A második tagban található  $C(k) = F(k) + iG(k)$  függvényt Theodorsen függvénynek is nevezik. Csak megemlítjük, hogy zárt alakban ezt a függvényt Hankel függvényekkel írhatjuk fel, a Hankel függvények pedig első, illetve másodrendű Bessel függvények segítségével definiálhatók. A szakirodalomban a Theodorsen függvény valós és képzetes részét gyakran egyszerű, közelítő függvényekkel is megadják:

$$C(k) \cong \begin{cases} 1 - \frac{0.165}{1 - i(0.045/k)} - \frac{0.335}{1 - i(0.3/k)} & \text{ha } k \leq 0.5; \\ 1 - \frac{0.165}{1 - i(0.041/k)} - \frac{0.335}{1 - i(0.32/k)} & \text{ha } k > 0.5; \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

A Theodorsen féle modell kiterjeszthető profil és kormánylap együttesének az esetére – ez a kiterjesztett forma a szakirodalomban megtalálható (pl. [10]). További kiterjesztés a visszatérő örvényes nyom (ez a forgószárnyas repülőgépeknél fontos) – ezzel a Loewy-féle számítás foglalkozik.

## II.2. További számítási módszerek

Itt csak röviden mutathatjuk be a Duhamel integrálon alapuló, *indukált hatásfüggvények* módszerét. A Duhamel integrál segítségével az áramlás történetét foglalhatjuk be a számításba. A módszert először Wagner vezette be, 1925-ben. Alapegyenlete a következő:

$$c_L^c = 2\pi \left( \alpha(0)\phi(s) + \int_0^s \frac{d\alpha(\sigma)}{dt} \phi(s-\sigma) d\sigma \right); \quad (\text{II.12})$$

A (II.12) egyenletből a felhajtóerő tényező *cirkulációtól* függő része számítható, a  $\phi(s)$ , Wagner függvény segítségével, melynek itt az 1940-ből származó, Jones féle közelítését adjuk meg (az alábbi összefüggés magyarázó sorában a korábban bevezetett dimenziótlan idő pontosabb definíciója olvasható):

$$\phi(s) \approx 1 - 0.165e^{-0.0455s} - 0.335e^{-0.3s}; \quad (\text{II.13})$$

$$\text{ahol: } s(t') = \frac{2}{c} \int_0^{t'} V_0(t) dt$$

Az indukált válaszfüggvények módszere nem csak az időtartományban, hanem a frekvencia tartományban is jól használható. Mivel pedig a stabil repülőgépek mozgása jól közelíthető harmonikus függvényekkel, azért ez a módszer széles körben használatos.

Fontos bemutatni az *indukált hatásfüggvények* módszerének az állapotér módszerhez illesztett alakját. A levezetés a szakirodalomban megtalálható (pl. [10]), a végeredmény a következő:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_1 b_2 (2V_0/s)^2 & -(b_1 + b_2)(2V_0/s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha(t); \quad (\text{II.14})$$

és

$$c_L(t) = c_L^\alpha \begin{bmatrix} b_1 b_2 (2V_0/s)^2 & (A_1 b_1 + A_2 b_2)(2V_0/s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

ahol:

$$A_1 = 0.165; b_1 = 0.0455; A_2 = 0.335; b_2 = 0.3;$$

A (II.14)-ben megjelenő két, állapotvektor-elem konkrét fizikai tartalma nehezen határozható meg, a fontos a kimenet, amely az időben változó felhajtóerő tényező értékét szolgáltatja.

Megjegyzendő, hogy a (II.14)-ben adott állandók a Wagner függvényből származnak. A szakirodalomban használatos például az  $A_1 = 0.5; b_1 = 0.13; A_2 = 0.5; b_2 = 1$ ; a Küssner függvényhez rendelt együttható csoport is.

Az összenyomhatóság, korlátozott Mach számig alapvetően a Prandtl-Meyer transzformáció segítségével vehető figyelembe. (II.15)-ben egy, a szakirodalomban javasolt Wagner függvény kiterjesztést mutatunk be, amely a fent említett, korlátozott Mach számig alkalmazható:

$$\phi(s, M) = \frac{1 - 0.165e^{-0.0455s(1-M^2)} - 0.335e^{-0.3s(1-M^2)}}{\sqrt{(1-M^2)}}; \quad (\text{II.15})$$

Az instacionárius aerodinamikai folyamatok leírásának jelentősen különböző útját jelentik a fél empirikus modellek – ezek legismertebbike az ONERA féle szemi empirikus differenciálegyenlet rendszer, amelyet itt szintén csak megemlítünk. Ezt bővebben a vonatkozó szakirodalom mutatja be. E módszer típus előnye, hogy a teljes folyamatba

illeszkedik egy, a többivel együtt megoldható, az instacioneritást leíró differenciálegyenlet rendszer. Hátránya viszont, hogy használatához konkrét együttthatók ismerete szükséges – ezeket többnyire aerodinamikai mérésekkel kell meghatározni (pl. identifikálni).

Napjainkban, a numerikus módszerek egyre nagyobb teret hódítanak, az instacionárius aerodinamikában is. Jelenleg nehézséget okoz például a szerkezet mozgása miatti perem változás figyelembe vétele, illetve a meglehetősen nagy számítás igény. A jövőben azonban e módszerek térhódítása, akár egyeduralkodóvá válása várható.

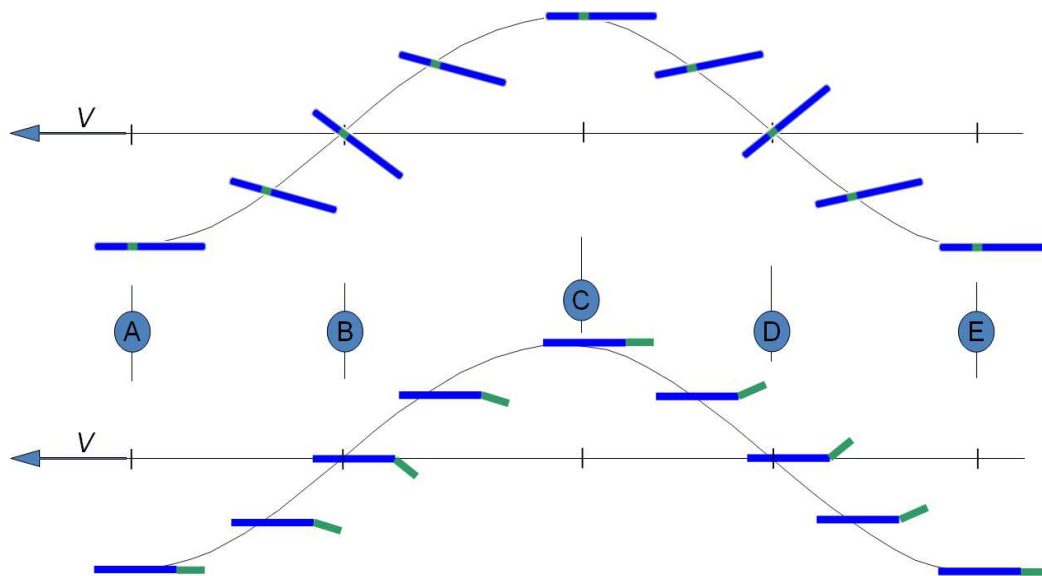
A II. pont alapvetően az instacioneritás figyelembe vételének a fontosságára hívja fel a figyelmet, komolyabb érdeklődés esetén a vonatkozó szakirodalom (pl. [2], [3], [5], [6], [8], [10], [14], [15], [18].....) alapos tanulmányozása javasolható.

### III. Periodikus aeroelasztikus jelenségek

A periodikus aeroelasztikus jelenségek az I.1. ábra „IV” jelű területére tartoznak, ezekben mindhárom (aerodinamikai, tehetetlenségi és rugalmas) erőhatást figyelembe kell venni. Ide a gerjesztett (pl. rázás, lobogás) és az öngerjesztett (pl. flutter) jelenségeket soroljuk – de ide tartozik a rugalmas repülőgépek dinamikája is.

Ennek a fejezetnek a tárgya egy olyan flutter modell (repülőgépszárny kapcsolt hajlító-csavaró lengésének vizsgálatára szolgáló fizikai-matematikai modell) bemutatása, amely ugyan elég egyszerű, de emellett szinte minden, lényeges fizikai hatás megjelenik benne. A munka elméleti részét egy számítási példa követi. Megjegyzendő, hogy a flutter számítás tartalmazza a divergencia számítását, mindössze a tehetetlenségi erőhatásokat kell belőle kihagyni.

Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy a „flutter” megnevezést elterjedten használják még az elektronikában is: így nevezik például a beérkező elektronikus jelek gyors váltakozását, amit például az atmoszféra zavarai idéznek elő. De flutternek nevezik például a CD vagy DVD lemezek gyors forgása közben előálló rezgéseket - ezek természetesen zavarják, vagy akár lehetetlenné is teszik a jelrögzítés, jelolvasás folyamatát. Mi itt, a repülőgépszárnyakon létrejövő flatterrel foglalkozunk.



III.1. ábra: Szárny flutter és szárny-kormánylap flutter

A repülőgépszárnyakon létrejövő, klasszikus flutter folyamata látható a III.1. ábra felső részén. Itt megfigyelhető egy *hajlító* lengés, amelynek alsó szélső helyzete az „A” illetve a vele lényegében azonos „E” pontban van. A felső szélső helyzet pedig a „C” pontban látható. A „B” pontban nulla kitérés és a harmonikus lengések elmélete szerint maximális, felfele irányuló sebesség van. A „D” pontban, a „B”-hez hasonlóan, nulla a kitérés, de maximális, lefele irányuló sebesség látható. Ez tehát egy teljes, *hajlító* lengés periódus.

Figyelmesen ránézve a III.1. ábra felső rész ábrájára, látható egy *csavaró* lengés (teljes periódusa) is. A *csavaró* lengés nulla kitérésű és maximális szögsebességű helyzete az „A”, a „C” és az „E” pontban látható. A maximális elcsavarodást pedig a „B” és „D” pontban találjuk.

Ezek szerint, a III.1. ábra felső részén egy, azonos frekvenciájú, de 90 fokos fázis eltérésű hajlító és csavaró lengés látható együtt. Amennyiben ez a helyzet, akkor megállapítható, hogy a szárny felfele lendülését a növekvő beállítási szög miatt növekvő légerő (felhajtó erő) segíti. És ugyanígy: a szárny lefelé lendülését a csökkenő beállítási szög miatt csökkenő légerő is segíti. Ez egyfajta aerodinamikai gerjesztés, amely a flatter szükséges, de nem elégséges feltétele.

A flatter tényleges vizsgálatakor a fenti fizikai megfontolást ugyanis ki kell egészíteni a mozgási sebességekből származó állásszög változás aerodinamikai csavaró nyomatékra kifejtett hatásával, ami az ellenkező értelmű aerodinamikai kapcsolódást jelent. Illetve a vizsgálat kiegészítendő a tehetetlenségi kapcsolat leírásával, valamint az időben változó légerők számításával is.

Mi, a szakirodalom nyomán, a továbbiakban csak azt vizsgáljuk, hogy mely repülési sebességen jön létre azonos frekvenciájú hajlító és csavaró lengés, és nem vizsgáljuk, hogy a két lengés fázisa mennyire tér el. (Ha például a frekvencia azonos, de a fáziseltérés nulla, akkor a fent tárgyalt kapcsolódás nem jön létre!) Ezt a sebességet nevezzük ebből a szempontból kritikus vagy flatter sebességnek. Ez, a szakirodalom szerint egy biztonságos korlát.

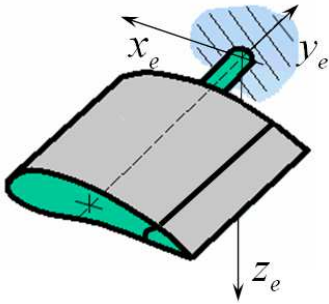
A III.1. ábra alsó részén egy szárny-kormánylap flatter, azaz kapcsolt hajlító csavaró lengés folyamatát mutatjuk be. Ebben a folyamatban a hajlító lengést a teljes, szárny-kormánylap rendszer végzi, és rá ugyanaz érvényes, mint amit az ábra felső részével kapcsolatban már kifejtettünk.

A csavaró lengést viszont a teljes szárny helyett csak a kormánylap végzi – az egyszerűség kedvéért feltételeztük, hogy a szárny-rész önmaga nem csavarodik el. A kormánylap ilyen értelmű mozgását például a kormányvezérlő rendszer rugalmassága teszi, teheti lehetővé. Egyébként a csavaró lengésre korábban leírtak értelemszerűen érvényesek a kormánylap lengési folyamatára is.

Végeredményben a III.1. ábra alsó részébráján kialakuló folyamat, lényegi elemeit tekintve nagyon hasonlít a felső ábrán vázolt folyamathoz, illetve megállapítható, hogy az azonos frekvenciájú, de 90 fokos fáziseltérésű szárny-kormánylap hajlító lengés és kormánylap csavaró lengés a csavarás irányából a hajlítás felé mutató, aerodinamikai gerjesztést jelent – és ezzel előáll a szárny-kormánylap flatter lehetősége

Első lépésben a III.1. ábrán látható, mindkét folyamatot együtt leíró matematikai modellt alakítunk ki. A következőkben úgy tekintjük, hogy a szárny flatter (a III.1. ábra felső részén látható folyamat) csavaró lengés része a divergencia következtében előálló, időben állandónak tekinthető elcsavarodás körül, mint középérték körül jön létre. A

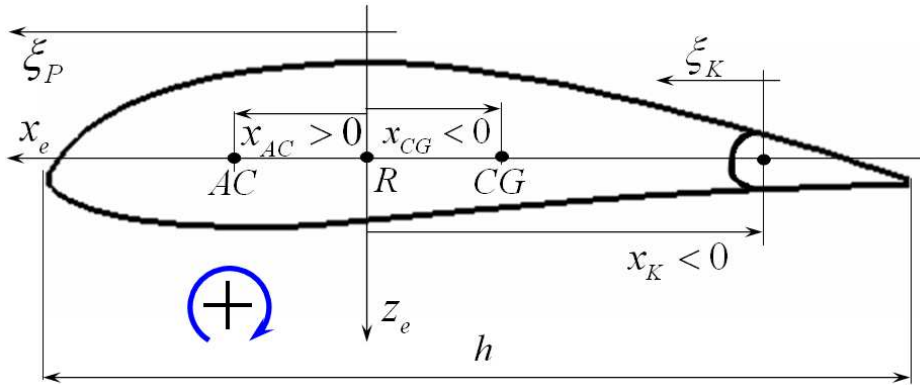
vizsgálatot a III.2. ábrán feltüntetett koordináta rendszerben (példaként a bal szárnyra) végezzük.



III.2. ábra: Koordináta rendszer és a szárny-modell

Tekintsük a III.2. ábrán látható, egyszerűsített szárny-kormánylap modellt. Tegyük fel, hogy a szárny egy hajlító-csavaró rugón keresztül csatlakozik a törzshöz, illetve, hogy a kormánylap egy, csavaró rugóval csatlakozik a szárnyhoz. A későbbiekben, az egyszerűség kedvéért feltesszük azt is, hogy a szárny húr hossza és profilja állandó – vagyis a valós fél-szárnyat egy rugalmasan csatlakozó elcsavaratlan téglalap szárnyal helyettesítjük. A rugalmas tengely pedig (az ábrán a szaggatott vonal) a szimmetria síkra merőleges, egyenes vonal.

A geometriai méretek definiálásának módja látható a III.3. ábrán. A kitűzött feladat tárgyalásához elegendő egy „ $x_e - z_e$ ” koordináta-rendszer felvétele:



III.3. ábra: A geometriai méretek definiálása

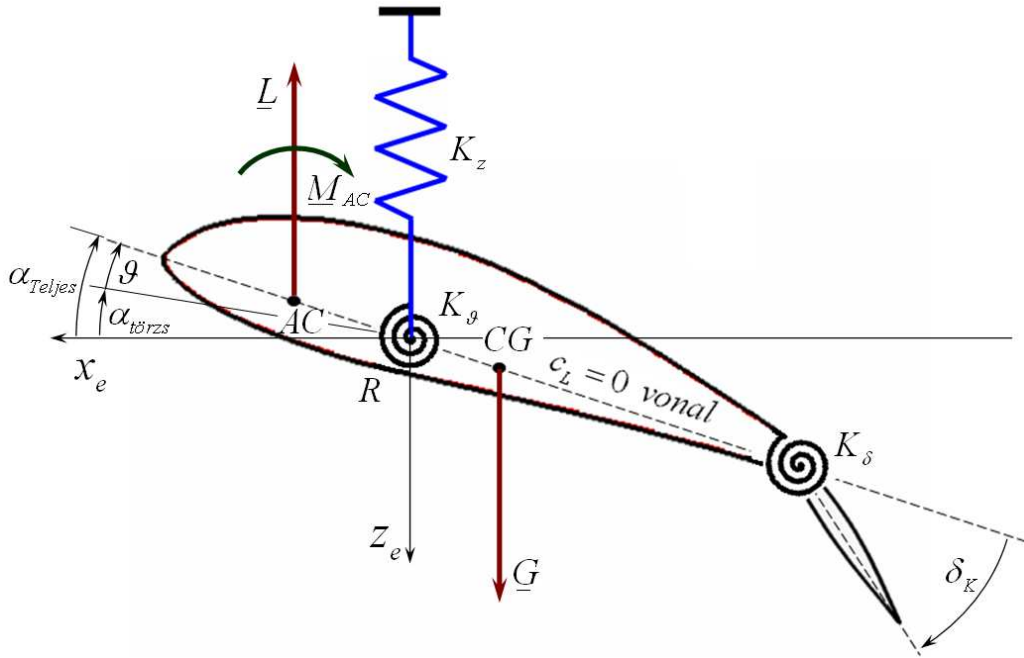
A koordináta rendszer origóját az „R”, rugalmas tengelyre tesszük, mivel az lesz a hajlító-csavaró lengést végző fél-szárny fizikai forgáspontja. Legyen az „AC” a profil és egyúttal az elcsavaratlan, téglalap alaprajzú szárny aerodinamikai centruma (középpontja) és a „CG” pont a súlypont.

A szárny és a kormánylap jobb megkülönböztetősége miatt vezessük be a  $\xi_p$ , a szárny profilja menti és a  $\xi_k$ , a kormánylap menti koordinátát. Az elméleti levezetésben benne lesz a kormánylap, a gyakorlati feladat megoldását azonban, ebben a munkában, az egyszerűség kedvéért a kormánylap nélküli elrendezésre mutatjuk csak be. A kormánylap kitérését  $\delta_k$  –val jelöltük.

A vizsgált rendszer (a hajlító és csavaró rugóval kapcsolódó szárny és a szárnyhoz csavaró rugóval kapcsolódó kormánylap) a III.4. ábrán látható. A három, lineáris rugót a megfelelő rugóállandóval ( $K_z$ ,  $K_\vartheta$  és  $K_\delta$ ) jellemezzük.

Az (I.1) kifejezéssel az I.2. ábrán látható teljes vagy abszolút állásszöget a ( $\alpha_{teljes}$ ) a törzs állásszöge ( $\alpha_{törzs}$ ) és a rugalmas elcsavarodási szög ( $\vartheta$ ) összegeként írtuk fel. A III.4.

ábrán látható szaggatott vonal – hasonlóan az I.2. ábrához – legyen a kitérítetlen kormánylap esetében érvényes nulla felhajtóerő irány.



III.4. ábra: Véges szárny modellje

A mozgásegyenleteket az Euler-Lagrange egyenlet alapján írjuk fel:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) + \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{esetünkben } n=3); \quad (\text{III.1})$$

Az általánosított koordináták (itt:  $q_1 = z_e$ ;  $q_2 = \vartheta$ ;  $q_3 = \delta_k$ ) függvényében a profillal jellemzett fél szárny, mozgási energiája:

$$dE_p = \frac{1}{2} [\dot{z}_e - \xi_p \dot{\vartheta}]^2 dm_p \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} m_p \dot{z}_e^2 + S_p \dot{z}_e \dot{\vartheta} + \frac{1}{2} \Theta_p \dot{\vartheta}^2; \quad (\text{III.2})$$

ahol:  $m_p$  - a fél-szárny kormánylap nélküli tömege;

$$S_p = - \int_{(m_p)} \xi_p dm_p;$$

$$\Theta_p = \int_{(m_p)} \xi_p^2 dm_p.$$

A mozgási energia meghatározásához ki kell számítani a szárny tömegpontjainak, illetve később a kormánylap tömegpontjainak ( $dm_k$ ) a sebességét. A sebesség számításában a negatív előjel az  $\underline{\omega} \times \underline{r}$  vektori szorzásból következik (a szögsebesség „y” irányú vektor, a helyvektor pedig „x<sub>e</sub>” irányba mutat, vektori szorzatuk „z<sub>e</sub>” irányú és negatív előjelű lesz). Csak megjegyezzük: a III.3. ábrán vázolt elrendezésben, amikor a súlypont a rugalmas tengely mögött van, az  $S_p$  statikai nyomaték számértéke pozitív lesz.

Írjuk fel a kormánylap sebességét és mozgási energiáját is:

$$v_K = \dot{z}_e - (x_K + \xi_K) \dot{\vartheta} - \xi_K \dot{\delta}_K; \quad \text{és:} \quad dE_K = \frac{1}{2} v_K^2 dm_K$$

innen:

$$E_K = \frac{m_K}{2} \dot{z}_e^2 + \frac{\Theta_{PK}}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{\Theta_K}{2} \dot{\delta}_K^2 + S_{PK} \dot{z}_e \dot{\vartheta} + S_K \dot{z}_e \dot{\delta}_K + D_{PK} \dot{\vartheta} \dot{\delta}_K \quad (\text{III.3})$$

A (III.3) egyenletben szereplő állandók jelentése:

$$\begin{aligned} m_K &= \int_{(m_K)} dm_K; & \Theta_{PK} &= \int_{(m_K)} (x_K + \xi_K)^2 dm_K \\ \Theta_K &= \int_{(m_K)} \xi_K^2 dm_K; & S_{PK} &= - \int_{(m_K)} (x_K + \xi_K) dm_K \\ S_K &= - \int_{(m_K)} \xi_K dm_K; & D_{PK} &= \int_{(m_K)} \xi_K (x_K + \xi_K) dm_K \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

A fenti mennyiségek előjelére a szárnynál tett megjegyzés vonatkozik. Meghatározandó továbbá a helyzeti energia is:

$$U = \frac{1}{2} K_z z_e^2 + \frac{1}{2} K_\vartheta \vartheta^2 + \frac{1}{2} K_\delta \delta_K^2; \quad (\text{III.5})$$

Számítsuk ki az általános erőt is:

$$Q_i = \frac{\delta W}{\delta q_i}; \quad \text{itt: } \delta W = F_z \delta z_e + M_\vartheta \delta \vartheta + M_\delta \delta(\delta_K); \quad (\text{III.6})$$

Figyelem: a (III.6)-ban közel ugyanazt a szimbólumot ( $\delta$ ) kétféle értelemben használjuk: az indexes alak a kormánylap kitérését, az index nélküli alak pedig a megváltozást jelenti.

Ezzel már felírható a három szabadságfoknak megfelelő három mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (E_P + E_K)}{\partial \dot{q}_i} \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad \text{itt: } q_1 = z_e; q_2 = \vartheta; q_3 = \delta_K; \quad (\text{III.7})$$

azaz:

$$(m_P + m_K) \ddot{z}_e + (S_P + S_{PK}) \ddot{\vartheta} + S_K \ddot{\delta}_K + K_z z_e = F_z; \quad (\text{III.8})$$

$$(S_P + S_{PK}) \ddot{z}_e + (\Theta_P + \Theta_{PK}) \ddot{\vartheta} + D_{PK} \ddot{\delta}_K + K_\vartheta \vartheta = M_\vartheta; \quad (\text{III.9})$$

$$S_K \ddot{z}_e + D_{PK} \ddot{\vartheta} + \Theta_K \ddot{\delta}_K + K_\delta \delta_K = M_\delta; \quad (\text{III.10})$$

A következőkben – a bevezetőben írtak szerint – egyszerűsítjük a feladatot, és a kormánylapot kihagyjuk a vizsgálatból. Az így adódó mozgásegyenlet rendszer:

$$m_P \ddot{z} + S_P \ddot{\vartheta} + K_z z_e = F_z; \quad (\text{III.11})$$

$$S_P \ddot{z} + \Theta_P \ddot{\vartheta} + K_\vartheta \vartheta = M_\vartheta; \quad (\text{III.12})$$



Megvizsgálandó a (III.11) és a (III.23) jobb oldalán álló erő, illetve nyomaték. Mivel a modell, amit vizsgálunk egy fél szárny (fél repülőgép), azért ennek az adataival kell számolni:

$$F_z = -\frac{L}{2} + \frac{G}{2} = -\left(\frac{\rho}{2}V_0^2 \frac{A}{2} c_L\right) + \frac{G}{2}; \quad (III.13)$$

$$\text{itt: } c_L = c_L^\alpha \alpha_{\text{teljes}} = c_L^\alpha \left( \alpha_{\text{törzs}} + \vartheta + \frac{\dot{z}_e}{V_0} + \Delta\alpha_\Gamma \right)';$$

és:

$$M_\vartheta = \frac{L}{2} x_{AC} + M_{AC} - \frac{G}{2} x_{CG}; \quad \text{itt: } M_{AC} = \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{A}{2} h c_{mAC}; \quad (III.14)$$

(megjegyzendő, hogy a jelen elrendezésben  $x_{CG} < 0$ )

Az állásszög számításakor figyelembe kell venni a profil függőleges sebességét ( $\dot{z}_e/V$ ). Ezen túl, az instacioneritás számításba vétele esetén a megváltozó felhajtóerő, illetve cirkuláció miatt leúszó örvények hatására is megváltozik az állásszög ( $\Delta\alpha_\Gamma$ ). E két, utolsó állásszög részt egyes (egyszerűbb) esetekben nem vesszük figyelembe; más esetekben pedig, amikor fizikailag pontosabb modellt alkalmazunk, igen.

### III.1. A szárny-flatter egyszerűsített vizsgálata

A fentiekben levezetett, szárny-flatter modellre egy igen egyszerű vizsgálati eljárást mutatunk be, remélhetőleg ebből is több, értékes tanulság vonható le. Ebben a modellben nem szerepel a súlyerő és nyomatéka és az aerodinamikai centrumra vonatkozó nyomaték sem. Ezek ui. adott repülési sebesség esetén állandó értékűek – így a kihagyásuk megengedhető, a homogén rész általános megoldását nem változtatják. Végeredményben a [20] szerinti két mozgásegyenlet:

$$m_p \frac{d^2 z_e}{dt^2} + S_p \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{L}{2} - K_z z_e; \quad (III.15)$$

$$\Theta_p \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + S_p \frac{d^2 z_e}{dt^2} = \frac{L}{2} x_{AC} - K_\vartheta \vartheta; \quad (III.16)$$

A (III.15) és (III.16) - ből – a szakirodalom nyomán – kihagyjuk a rugalmas elcsavarodási szög állandó részét is.

Tegyük fel, hogy a hajlító lengés és a csavaró lengés egyaránt harmonikus lengésként írható fel, azaz (itt az „A” index az amplitúdóra utal):

$$z_e = z_A e^{i\omega t} \quad \text{és} \quad \vartheta = \vartheta_A e^{i\omega t}; \quad (III.17)$$

Helyettesítsük be (III.15)-be és (III.16)-ba (III.17)-et:

$$-m_p \omega^2 z_A e^{i\omega t} - S_p \omega^2 \vartheta_A e^{i\omega t} = -(L/2) - K_z z_A e^{i\omega t}; \quad (\text{III.18})$$

$$-\Theta_p \omega^2 \vartheta_A e^{i\omega t} - S_p \omega^2 z_A e^{i\omega t} = (L/2) x_{AC} - K_\vartheta \vartheta_A e^{i\omega t}; \quad (\text{III.19})$$

A felhajtóerő változó része is felírható az  $\omega$  körfrekvencia segítségével:

$$\frac{L}{2} = \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{A}{2} c_L^\alpha \vartheta = \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{A}{2} c_L^\alpha \vartheta_A e^{i\omega t}; \quad (\text{III.20})$$

A (III.20) tulajdonképpen a felhajtóerőnek a súlyerő feletti részét jelenti. Könnyen belátható, hogy az így felírt felhajtóerő-növekmény a nulla alapérték körül (harmonikusan) váltakozik, a középértéke nulla.

Mivel az  $e^{i\omega t}$  minden tagban megjelent és e tényező értéke általában különbözik nullától – az egyenletekben ezzel a tényezővel egyszerűsíthetünk, továbbá mínusz eggyel szorozva kapjuk, hogy:

$$m_p \omega^2 z_A + S_p \omega^2 \vartheta_A = \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{A}{2} c_L^\alpha \vartheta_A + K_z z_A; \quad (\text{III.21})$$

$$\Theta_p \omega^2 \vartheta_A + S_p \omega^2 z_A = -\frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{A}{2} c_L^\alpha \vartheta_A x_{AC} + K_\vartheta \vartheta_A; \quad (\text{III.22})$$

A fenti két egyenlet (bennük ismeretlennek tekintve a  $(z_A, \vartheta_A)$  mennyiségeket), vektor-mátrix alakban is felírható, ezzel homogén lineáris algebrai egyenlet-rendszert kapunk:

$$\begin{bmatrix} m_p \omega^2 - K_z & S_p \omega^2 - \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{S}{2} c_L^\alpha \\ S_p \omega^2 & \Theta_p \omega^2 - K_\vartheta + \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{S}{2} c_L^\alpha x_{AC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ \vartheta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Megmutatható, hogy a (III.15)-(III.16) ún. merev differenciálegyenlet rendszer, a numerikus megoldása explicit módszerekkel gyakorlatilag nem lehetséges – numerikusan az implicit módszer osztály, nevezetesen a BDM (Backward Diffrence Methods) módszer csoport használata javasolható.

A homogén lineáris algebrai egyenlet-rendszernek a triviálistól különböző megoldása pontosan akkor van, ha a determinánsa zérus:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ \vartheta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ad - cb = 0; \quad (\text{III.24})$$

$$a = m_p \omega^2 - K_z; \quad b = S_p \omega^2 - \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{S}{2} c_L^\alpha;$$

$$c = S_p \omega^2; \quad d = \Theta_p \omega^2 - K_\vartheta + \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{S}{2} c_L^\alpha x_{AC}$$

A determinánsban meghatározott műveletek elvégzése után egy,  $\omega$ -ra nézve negyedfokú,  $\omega^2$ -re nézve másodfokú egyenletet kapunk:

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0;$$

$$A = m_p \Theta_p - S_p^2; \quad C = K_z K_\vartheta - K_z \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{S}{2} c_L^\alpha x_{AC}; \quad (III.25)$$

$$B = S_p \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{S}{2} c_L^\alpha + m_p \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{S}{2} c_L^\alpha x_{AC} - m_p K_\vartheta - \Theta_p K_z;$$

A (III.25) egyenletből kisebb sebességeknél, ha  $B^2 - 4AC > 0$  két, különböző valós sajátkörfrekvenciát kapunk. Abban az esetben, amikor a sebesség növelésével a  $B^2 = 4AC$  egyenlőség teljesül, csak egy, közös sajátkörfrekvencia adódik – ezt a sebességet nevezzük a szárny flatter sebességének (esetleg kritikus sebességnek).

Nem szabad elfeledkezni arról, hogy ez egy nagymértékben egyszerűsített modell (lineáris és semmiféle csillapítást sem tartalmaz); ezért a belőle származó eredményeket óvatosan kell kezelni.

## III.2. Számítási példa

Válasszunk példaként egy repülőgépet, melynek adatait az alábbiakban adjuk meg:

A szárny fesztáv:	$b = 15 [m]$	A repülő súlya:	$G = 2800 [N]$
Szárnyfelület:	$A = 7.5 + 7.5 [m^2]$	Fél-szárny tömeg:	$m_p = 57 [kg]$
Referencia sebesség:	$V_{REF} = 30 [m/s]$	Súlypont helye: (számított érték)	$x_{CG} \cong -0.195 [m]$
Húr:	$c = 1 [m]$	Fél-szárny tehetetlenségi nyomatéka:	$\Theta_p = 4.75 [kgm^2]$
Felhajtóerő tényező iránytangense:	$c_L^\alpha = \frac{\partial c_L}{\partial \alpha} = 4.3 [1/rad]$	Fél-szárny statikai nyomatéka:	$S_p = 5,7 [kgm]$
AC távolság:	$x_{AC} = 0.1 [m]$	Hajlító rugóállandó:	$K_z = 55000 [N/m]$
Nyomatéki tényező:	$c_{mAC} = -0.1$	Csavaró rugóállandó:	$K_\vartheta = 85000 [Nm/rad]$
Az „R” pont és a kilépőél távolsága:			$x_{TE} = -0.65 [m]$

A flatter vizsgálatában fontosak az instacionárius hatások. Ezek figyelembe vétele – ebben az egyszerű példában – a legegyszerűbb módon történhet csak. A leúszó örvények hatását a felhajtóerő tényező iránytangensének csökkentésével vesszük figyelembe:

$$c_{Linst}^\alpha = 0.9 c_L^\alpha;$$

Az instacioneritás másik hatása szerint a szárnyat körülvevő levegő egy része a szárnnyal együtt mozog: úgy tekintjük, hogy az együttmozgó tömeg az a levegő tömeg, ami a szárnyat pontosan befoglaló henger tartalmaz. Ezt kapcsolt tömeggel, kapcsolt statikai nyomatékkal, illetve kapcsolt tehetetlenségi nyomatékkal vesszük figyelembe – ezeket az értékeket az alábbi táblázat tartalmazza:

Kapcsolt tömeg:	$m_{kap} = 7.2 [kg]$	Kapcsolt statikai nyomaték:	$S_{kap} = 1.4 [kgm]$
Kapcsolt tehetetlenség:	$\Theta_{kap} = 0.9 [kgm^2]$		

A repülőgép referencia állapotbeli teljes állásszöge:

$$c_{LREF} = \frac{2G}{\rho V^2 A} = 0.339; \quad \alpha_{TeljesREF} = \frac{c_L}{c_L^\alpha} = 0.07875 [rad] = 4.512 [fok]; \quad (III.26)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a repülőgép ebben a referencia-állapotban kitérítetlen kormányval repül, vagyis a (III.14)-ben adott, eredő nyomaték értéke nulla:

$$M_\vartheta = 0 = L x_{AC} + M_{AC} - G x_{CG};$$

$$L x_{AC} = 2800 \cdot 0.1 = 280 [Nm];$$

$$M_{AC} = \frac{\rho}{2} V_0^2 A h c_{mAC} = \frac{1.225}{2} \cdot 30^2 \cdot 15 \cdot (-0.1) = -826.9 [Nm];$$

$$x_{CG} = \frac{L x_{AC} + M_{AC}}{G} = \frac{280 - 826.9}{2800} = -0.1953125 [m] \cong -0.195 [m];$$

Ebben az állapotban a rugalmas elcsavarodás szöge nulla, és mivel nincs időben változó hatás, illetve folyamat, akkor:

$$\alpha_{Teljes} = \alpha_{törzs}; \quad \vartheta = 0; \quad (III.27)$$

A fenti modellben a divergencia folyamata is vizsgálható, ezt itt konkrétan nem vizsgáljuk, csak néhány, általános megjegyzést teszünk.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az így meghatározott súlypont helyzet nem változik – vagyis ez a feltételezett repülőgép súlypont helyzete. További, a referencia sebességtől különböző repülési sebességek esetén a repülőgép vezető a kereszt-tengelyre vonatkozó nyomatékat a magassági kormányval egyenlíti ki. Azaz a súlypontra vonatkozó eredő nyomaték más repülési sebességeken is nulla lesz – de ez a vízszintes vezérsík nyomatékával együtt adódik így. Ez a nyomaték a továbbiakban a rugalmas szárny szempontjából külső nyomatéknak tekintendő, ezért a (III.15) - (III.16) differenciálegyenlet rendszerben nem szerepel.

Feltesszük továbbá, hogy a felhajtóerő állandó része, illetve időben változó folyamat vizsgálata esetén (flutter) a középértéke egyenlő a súlyerő ellentettjével: vagyis a továbbiakban is fennáll az erőegyensúly (vagy legalább a felhajtóerő középértékére vett erőegyensúly).

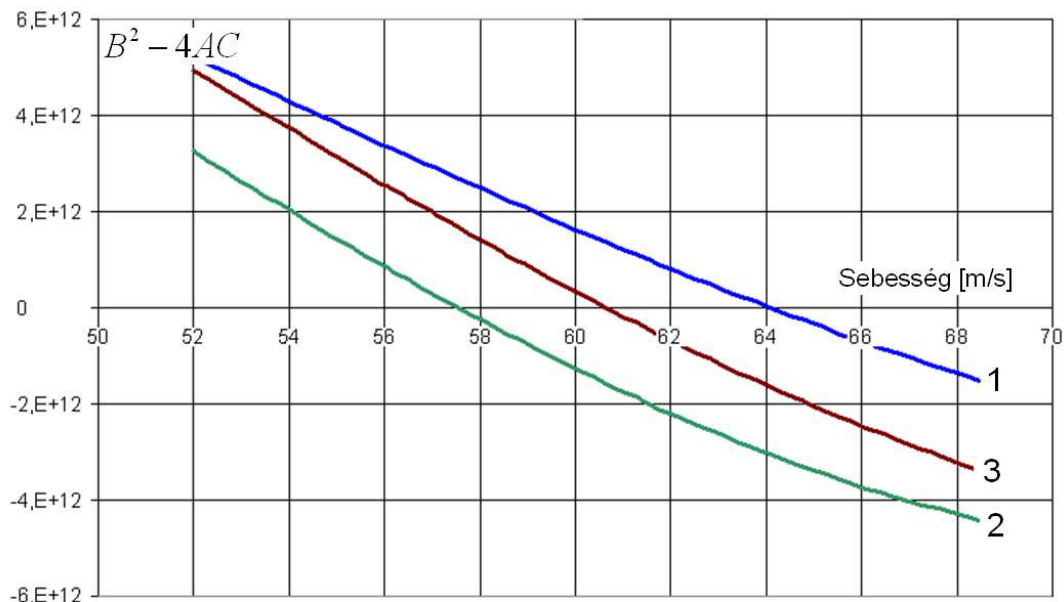
A fenti magyarázó megjegyzésre azért van szükség, hogy megmutassuk: létezik, létezhet a függőleges tengelyre vett erőegyensúly és a kereszttenegelyre vonatkozó nyomatéki egyensúly, miközben a repülőgép a referencia sebességtől különböző sebességgel (vízszintesen) repül. A globális egyensúly feltevése mellett viszont a szárnynak időben állandó vagy változó hajlító és csavaró deformációja lesz.

A vizsgált valóságoshoz legalább is közeli *repülési állapot* rögzítése azért is fontos, mert a klasszikusnak tekinthető szakirodalomban a divergencia jelenségét egy szélcsatorna modellen vizsgálják – ebben az esetben az  $L = G$  feltétel teljesülését nem követelik meg, az így előálló modell lényegesen különbözik az általunk definiálttól. (A divergenciával részletesen az I.1.2. pontban foglalkoztunk.)

A fentiekben definiált, igen nagyvonalú modell alapján, a minta-adatokkal elvégeztük a flutter számítást. Az eredményt – a  $B^2 - 4AC = f(V_0)$  értékeket a sebesség függvényében – a III.5. ábrán tüntettük fel. Ameddig ez a mennyiség nagyobb, mint nulla, addig a (III.25) negyedfokú, algebrai egyenletnek két, különböző, valós gyöke adódik – hiszen (III.25)  $\omega^2$ -re nézve másodfokú és  $\omega^2$  kiszámolása után  $\omega$  gyökvonással megkapható. Ebben az esetben a plusz-mínusz előjel párnak nincs jelentősége.

A  $B^2 - 4AC = 0$  esetben egy, négyzetes gyök adódik – pontosan ez a flutter, illetve az ehhez az esethez tartozó sebességet nevezzük flutter sebességnek. Ezt a helyzetet a példában a referencia sebesség folyamatos növelésével értük el.

A sebesség további növelése  $B^2 - 4AC < 0$  esethez vezet, ekkor a (III.25) egyenletnek a valós számok felett nincs megoldása. A III.5. ábrára pillantva egyébként észrevehető, hogy a vizsgált diszkrimináns rendkívül meredeken változik.



III.5. ábra: A példaszámítás eredménye

Az „1”-es jelű görbe az alap esetet mutatja, amikor sem a kapcsolt tömegeket, sem az instacionaritást nem vesszük figyelembe. A metszéspont a  $\sim 64.09 [m/s]$  sebességnél

adódik. Ekkor alakul ki a csavaró és hajlító lengés közös (azonos) sajátkörfrekvenciája, ennek értéke  $\sim 64.85[r/s]$ . Ennél kisebb sebességeknél két, különböző sajátkörfrekvencia létezik: pl. a referencia sebességnél az  $\omega_1 = 33.15[r/s]$  és  $\omega_2 = 132.22[r/s]$  sajátkörfrekvencia jellemzi a hajlító, illetve a csavaró lengést (a referencia sebesség:  $V_0 = 30[m/s]$ ).

A „2”-es jelű görbe a kapcsolt tömegek hatását mutatja. Ez egyértelműen a flutter sebesség csökkenését eredményezi:  $V_{fl} \cong 57.54[m/s]$ . Hasonlóképpen, bár kisebb mértékben csökken a közös sajátkörfrekvencia értéke:  $\omega_1 = \omega_2 \cong 60.96[r/s]$ .

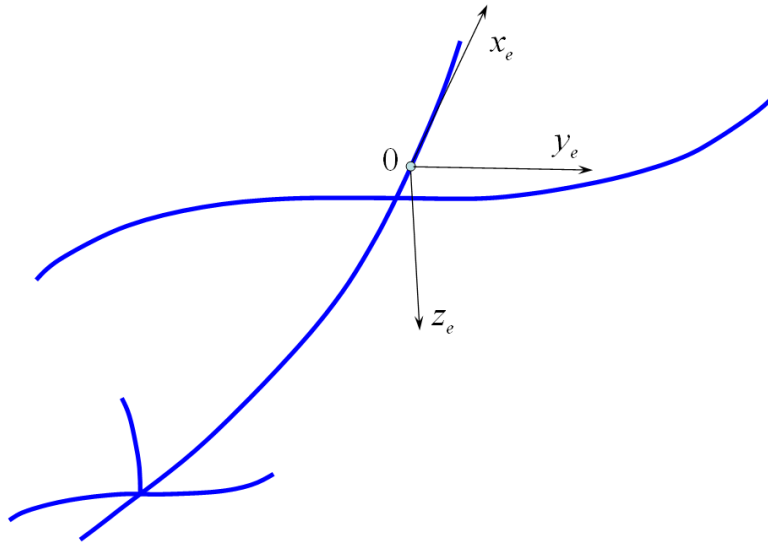
Végül a „3”-as jelű görbe – amely az ábrázolt sebesség tartományban a két előző görbe között fut – tartalmazza a kapcsolt tömegek és az instacioneritás hatását is. Ebben az esetben a flutter sebesség értéke  $\sim 60.66[m/s]$ . A közös sajátkörfrekvencia pedig  $\sim 60.99[r/s]$ .

A fentiekben leírt számítási módszer – ekvivalens mennyiségek bevezetése esetén – véges szárnyra is alkalmazható. A módszer levezetése során azonban több, jelentős egyszerűsítő feltételt kellett bevezetni. Ezek miatt az eljárás és az eredménye (amely a vonatkozó tankönyvek egyszerű módszereivel lényegében azonos), meglehetősen bizonytalan, gyakorlati esetben legfeljebb első becslésként használható.

A numerikus modellezéssel kapcsolatban ismételten hangsúlyozzuk, hogy amennyiben a sajátértékek erősen különböznek, mint esetünkben a referencia sebességnél, akkor – pl. [12] szerint – az explicit módszerek helyett implicit módszerek alkalmazandók.

## IV. Aeroelasztikus modellek

A repülőgépek szerkezete – a rá ható igénybevételek következtében – deformálódik. A repülőgép és a szerkezete is háromdimenziós, ennek megfelelően minden egyes pont elmozdulhat, illetve elfordulhat a többi ponthoz képest. A deformáció ilyen részletességű vizsgálata messze meghaladja a lehetőségeinket. Ebben a fejezetben egy leegyszerűsített rugalmas modellel foglalkozunk – ez látható a IV.1. ábrán.



IV.1. ábra: Rugalmas repülő egyszerű modellje

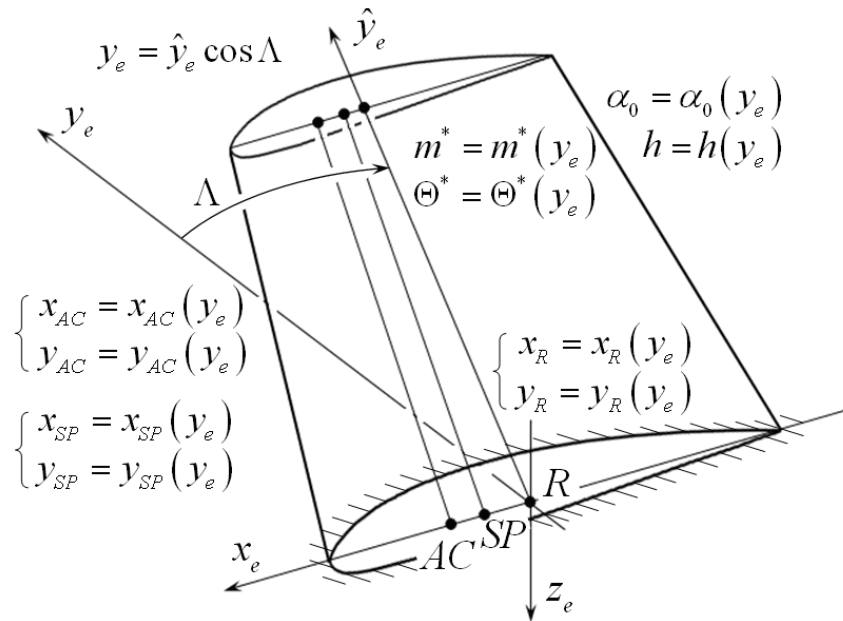
Feltételezzük, hogy az általunk vizsgált kérdéskörben a szerkezet olyan, rugalmas vonalakkal modellezhető, amelyeknek van hajlító ( $IE$ ) és csavaró ( $I_pG$ ) merevsége. A rugalmas vonalakat az egyes szerkezetek csavaró (vagy rugalmas) középpontjai alkotják. A következő vizsgálatokban csak a legegyszerűbb, lineáris modellekkel foglalkozunk, illetve elhanyagoljuk a nyíró deformációt, amely általában sokkal kisebb, mint a hajlító deformáció.

Ezekhez a rugalmas vonalakhoz a hajlító és csavaró merevségen túl, az eredeti kialakításnak megfelelően további tulajdonságokat is rendelünk. Minden vonalnak van megoszló tömege ( $m^* [kg/m]$ ) – ezeknek a tömegeknek az összessége a teljes repülőgép tömegét adja. Létezik továbbá, a rugalmas középpontra számított, megoszló tehetetlenségi nyomaték ( $\Theta^* [kgm^2/m]$ ) és statikai nyomaték is ( $S^* [kgm/m]$ ). Illetve, az egyes vonalakon – az eredeti szerkezet tulajdonságainak megfelelően – a levegő helyi sebessége szerinti légerők és ezek nyomatéka keletkezik.

A vizsgálatokat – általában – a IV.1. ábrán feltüntetett, „elasztikus”-nak nevezett koordináta rendszerben végezzük.

Ebben a fejezetben – a fontosságának megfelelően – részletesen a repülőgépek szárnyával foglalkozunk. A további szerkezetek részint hasonló módszerekkel vizsgálhatók, részint a repülőgépek esetében nagyon sok, ilyen típusú probléma a szárnyal kapcsolatban merül fel.

Egy szárny részletesebb modelljét a IV.2. ábrán tüntettük fel. Az ábrán egy „V” állás nélküli, (egyszeresen) nyilazott szárny látható (részletesen azonban csak az egyenes szárnyakat vizsgáljuk).



IV.2. ábra: Véges szárny modellje

A szárny háromdimenziós modelljét a IV.2. ábrán tüntettük fel, az  $(x_e, y_e, z_e)$  koordináta rendszerben. Feltesszük, hogy létezik aerodinamikai centrum (AC), ennek helyét az  $x_{AC}$  és az  $y_{AC}$  függvény határozza meg. A szárny súlyvonalát (SP) az  $x_{SP}$  és az  $y_{SP}$  függvény, a rugalmas tengelyt pedig az  $x_R$  és az  $y_R$  függvény írja le. Ezek nem feltétlenül egyenes vonalak – bár sok esetben jól közelíthetők egyenessel. Az egyszerűség kedvéért csak egy nyilazási szöget ( $\Lambda$ ) definiálunk, illetve az egyenes, „V” állás nélküli szárnyat vizsgálva feltesszük, hogy  $x_R = x_R(y_e) = 0$ .

A szárny fontos jellemzője a megoszló tömege ( $m^* [kg/m]$ ) és a rugalmas tengelyre vonatkoztatott megoszló tehetetlenségi nyomatéka ( $\Theta^* [kgm^2/m]$ ), valamint megoszló statikai nyomatéka ( $S^* [kgm/m]$ ). Adottnak tekintjük továbbá a szárnymetszetek beállítási szög eloszlását ( $\alpha_0 = \alpha_0(y_e)$ ) és a húr eloszlást ( $h = h(y_e)$ ) valamint a profil jellemzőket (első sorban a  $c_L^\alpha = c_L^\alpha(y_e)$  függvényt). A vizsgálatainkban felhasználjuk még a hajlító merevség eloszlást:  $IE = IE(y_e)$  és a csavaró merevség eloszlást:  $I_p G = I_p G(y_e)$ .

A IV.2. ábrán vázolt esetben a szárny rugalmas tengelye az  $\hat{y}_e$  tengely, amelyre általában igaz, hogy:  $\hat{y}_e = y_e / \cos \Lambda$ . Amennyiben a megoszló csavaró nyomatékot ( $\mathbf{t}_{CS}$ ) az  $(x_e, y_e, z_e)$  rendszerben számítjuk, akkor az felbontható egy, a rugalmas tengely irányába mutató megoszló csavaró nyomatékra ( $\hat{\mathbf{t}}_{CS}$ ) és egy megoszló hajlító nyomatékra ( $\mathbf{t}_H$ ). Vagyis, nyilazott szárny esetén a csavarásból hajlítás is származik.



A vizsgálat arra irányul, hogy meghatározzuk a szárny hajlító lengését leíró  $z_e = z_e(y_e, \tau)$  és a rugalmas elcsavarodását leíró  $\vartheta = \vartheta(y_e, \tau)$  függvény-párt.

A repülőgép szerkezetek matematikai modellje – az általános fizikai tárgyalásmódnak megfelelően – lehet differenciálegyenlet vagy lehet integrálegyenlet. Tekintsük először a **differenciálegyenletet**, és korlátozzuk a vizsgálatot egyenes szárny ( $\Lambda = 0$ ) esetére. A mechanikából ismert, hajlított tartó rugalmas szálának differenciálegyenlete kimondja, hogy a görbület egyenesen arányos a hajlító nyomatékkal és fordítottan arányos a hajlító merevséggel:

$$z_e'' = \frac{M}{IE} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y_e^2} \left( IE \frac{\partial^2 z_e}{\partial y_e^2} \right) = p_z(y_e, \tau) - m^* \frac{\partial^2 z_e}{\partial \tau^2}; \quad (IV.1)$$

A (IV.1) egyenletben az időt  $\tau$ -val jelöltük, megkülönböztetendő a  $t$ -vel jelölt megoszló csavaró nyomatéktól. A (IV.1) bal oldalán álló, kiinduló egyenletet a hely szerint kétszer deriválva a jobb oldali végeredményt kapjuk; itt  $p_z(y_e, \tau)$  az eredő külső megoszló terhelés és  $-m^* (\partial^2 z_e / \partial \tau^2)$  pedig a tehetetlenségi erőből származó, megoszló terhelés.

Egyszerűen belátható, hogy ha centrifugális erő ( $C(y_e)$ ) is hat (pl. helikopter rotorlapát esete), akkor (IV.1)-et a bal oldalon álló, a centrifugális erő merevítő hatását figyelembe vevő taggal kell kibővíteni:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_e^2} \left( IE \frac{\partial^2 z_e}{\partial y_e^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_e} \left( C(y_e) \frac{\partial z_e}{\partial y_e} \right) = p_z(y_e, \tau) - m^* \frac{\partial^2 z_e}{\partial \tau^2}; \quad (IV.2)$$

A (IV.1), illetve (IV.2) negyedrendű, parciális differenciálegyenlet, megoldásához különböző technikákat alkalmaznak – talán a leggyakoribb a sajátlengésképek segítségével történő megoldás.

A rugalmas szál elcsavarodására – a mechanikából szintén ismert differenciálegyenlet – az alábbi formában írható fel:

$$\frac{\partial}{\partial y_e} \left( I_p G \frac{\partial \vartheta}{\partial y_e} \right) = -t_y(y_e, \tau) + \Theta^* \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2}; \quad (IV.3)$$

A (IV.3) másodrendű, parciális differenciálegyenlet, megoldását szintén alapvetően a sajátlengésképek módszerével kereshetjük. Amennyiben centrifugális erőtér is hat, akkor ez az egyenlet az alábbi formában írható fel:

$$\frac{\partial}{\partial y_e} \left( I_p G \frac{\partial \vartheta}{\partial y_e} \right) - \Theta^* \alpha_{Teljes} \Omega^2 = -t_y(y_e, \tau) + \Theta^* \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2}; \quad (\alpha_{Teljes} = \alpha_0 + \vartheta); \quad (IV.4)$$

A (IV.4)-ben, a korábban alkalmazott „törzs állásszög”-et a fesztáv mentén változó, az elcsavaratlan szárny alakját leíró,  $\alpha_0$  beállítási szögre cseréltük.

A  $p_z(y_e, \tau)$  eredő külső megoszló terhelés és a  $t_y(y_e, \tau)$  eredő külső megoszló csavaró terhelés tartalmazza az aerodinamikai hatásokból származó megoszló erőket és azok rugalmas tengelyre vett nyomatékát, általános esetben beleértve az instacioner aerodinamikai hatásokat is, illetve a megoszló súlyerőt és annak megfelelő nyomatékát.

Egy rugalmas repülőgépszárny viselkedését tehát a (IV.1) és (IV.3) segítségével vizsgálhatjuk, egy rugalmas rotorlapát vizsgálatához pedig a (IV.2) és a (IV.4) felhasználására van szükség. Többek között ez az elméleti alapja például a szárny vagy a rotorlapát flutter-számításának is.

A (IV.1) és (IV.3) nem csak egy repülőgépszárny viselkedésének vizsgálatára alkalmas: megfelelő módon alkalmazva (és szükség szerint kiegészítve) egy teljes, rugalmas repülőgép vizsgálatát is elvégezhetjük így. Természetesen egy ilyen vizsgálat általában sokkal-sokkal bonyolultabb lesz, mint a „hagyományos” repülésmechanikai elemzés.

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk csak (IV.1)-et, és ezt is abban az esetben, amikor nincs külső terhelés:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_e^2} \left( IE \frac{\partial^2 z_e}{\partial y_e^2} \right) = \omega^2 = -m^* \frac{\partial^2 z_e}{\partial \tau^2}; \quad (IV.5)$$

A fenti egyenlet bal oldala csak a hely, a jobb oldal csak az idő függvénye - ezért ezek egy közös állandóval egyenlőek. Tegyük fel továbbá, hogy a  $z_e = z_e(y_e, \tau)$  hajlító deformáció függvény-szorzatként írható fel, ahol az egyik tag csak a hely, a másik csak az idő függvénye:

$$z_e(y_e, \tau) = Z(y_e)T(\tau); \quad (IV.6)$$

Ennek alapján (IV.5) a következő módon írható fel:

$$\frac{(IE Z'')''}{m^* Z} = \omega^2 = -\frac{\ddot{T}}{T}; \quad (IV.7)$$

A (IV.7) pedig két egyenletre bontható fel:

$$(IE Z'')'' - \omega^2 m^* Z = 0; \quad (IV.8)$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0; \quad (IV.9)$$

Ezzel az eredetileg negyedrendű, parciális differenciálegyenlet visszavezethető egy negyedrendű és egy másodrendű, közönséges differenciálegyenletre. Ezek pedig már nagyságrendekkel könnyebben oldhatók meg. A megoldás néhány részletével később, az integrálegyenlet forma tárgyalása során foglalkozunk.

Már többször megemlítettük a dinamikai terhelés fogalmát. A tényleges hajlító és csavaró deformáció kiszámítása ezen a területen is új utat nyit. Hagyományosan egy igénybevételt mondjuk a „ $\sigma = M/K$ ” kifejezéssel számítunk – itt az „ $M$ ” legyen a külső, terhelő nyomaték, a „ $K$ ” pedig a megfelelő keresztmetszeti tényező.

A fentiekben ismertetett számítás azonban megengedi, hogy a deformáció segítségével meghatározzuk például a relatív megnyúlást ( $\varepsilon$ ). Ennek ismeretében pedig a feszültség a lineáris tartományban a „ $\sigma_{DIN} = E\varepsilon$ ” összefüggéssel számítható.

Statikus terhelés esetén, nyilvánvalóan  $\sigma = \sigma_{DIN}$ , vagyis a kétféle számítás azonos eredményt köteles szolgáltatni. Ezzel szemben, időben változó terhelés esetén a kétféle feszültség értéke egymástól eltér, hiszen a változáshoz olyan hatások köthetők – pl. a tehetetlenség – amelyek feltétlenül eltérést okoznak. Csak példaként: egy elég gyorsan változó, előjelet váltó hajlítás során nincs idő a szerkezeti deformáció növekedésére és ezért a feszültség is csak a valós deformációnak megfelelően nő. Ekkor, például a dinamikai terhelés jelentősen kisebb lehet a hagyományos módon számított igénybevételnél.

Ennek, a modernnek tekinthető számolásnak a további előnye, hogy nyomon követhető az igénybevétel időbeli lefutása is és ezzel a kifáradási folyamatok pontosabb vizsgálata felé is megnyílik az út. A ténylegest jól közelítő dinamikai terhelés felhasználásával megalapozott terhelési spektrum állítható össze.

Az **integrálegyenlet** típusú megközelítés két alapegyenlete a következő ( $b$  a fesztáv):

$$z_e(y_e, \tau) = \int_0^{b/2} \left\{ C^{zz}(y_e, \eta_e) [p_z(\eta_e, \tau) - m^*(\eta_e) \ddot{z}_e(\eta_e, \tau)] \right\} d\eta_e - \int_0^{b/2} \left\{ C^{z\vartheta}(y_e, \eta_e) [t_y(\eta_e, \tau) - \Theta^*(\eta_e) \ddot{\vartheta}(\eta_e, \tau)] \right\} d\eta_e ; \quad (IV.10)$$

és

$$\vartheta(y_e, \tau) = \int_0^{b/2} \left\{ C^{\vartheta z}(y_e, \eta_e) [p_z(\eta_e, \tau) - m^*(\eta_e) \ddot{z}_e(\eta_e, \tau)] \right\} d\eta_e - \int_0^{b/2} \left\{ C^{\vartheta\vartheta}(y_e, \eta_e) [t_y(\eta_e, \tau) - \Theta^*(\eta_e) \ddot{\vartheta}(\eta_e, \tau)] \right\} d\eta_e ; \quad (IV.11)$$

ahol:

$C^{zz}(y_e, \eta_e)$  – deformáció az  $y_e$  helyen, ha az  $\eta_e$  helyen egységnyi erő – terhelés hat;

$C^{z\vartheta}(y_e, \eta_e)$  – deformáció az  $y_e$  helyen, ha az  $\eta_e$  helyen egységnyi csavaró – terhelés hat;

$C^{\vartheta z}(y_e, \eta_e)$  – elcsavaródás az  $y_e$  helyen, ha az  $\eta_e$  helyen erő – egységnyi terhelés hat;

$C^{\vartheta\vartheta}(y_e, \eta_e)$  – elcsavaródás az  $y_e$  helyen, ha az  $\eta_e$  helyen egységnyi csavaró – terhelés hat;

A (IV.10) és a (IV.11) egyenlet az általunk vizsgált területen a legáltalánosabb egyenlet. A fent szereplő, Green-féle hatásfüggvények rendre kifejezik a hajlító terhelés okozta lehajlás esetét ( $C^{zz}$ ), a csavarásból származó lehajlást ( $C^{z\vartheta}$ ), a hajlításból származó

elcsavarodást ( $C^{\vartheta z}$ ) és végül a csavaró terhelésből eredő elcsavarodás esetét ( $C^{\vartheta\vartheta}$ ). A differenciálegyenlet bevezetésekor egyszerűbb esetet vizsgáltunk, ott feltettük, hogy a hajlítás és a csavarás független, azaz:  $C^{z\vartheta} = C^{\vartheta z} \equiv 0$ .

Ezek a hatásfüggvények számítással is meghatározhatók, azonban – kész szerkezetek esetén – jellemzően mérésel szokták meghatározni őket. Ez igen fontos, mert egy-egy repülőgép szerkezet rendkívül összetett, számos kisebb és nagyobb alkotó elemből áll és ezen alkotó elemek kapcsolata is többféle lehet (pl. szegecselés, ragasztás, stb.). Az ilyen, bonyolult szerkezetet napjainkban is nehéz számítással vizsgálni – olyan adatmennyiséget kellene bevinni, tárolni és kezelni, ami meghaladja a jelenlegi lehetőségeinket. Ezzel szemben a mérés viszonylag egyszerű, gyors és – mivel a tényleges szerkezeten történhet – mindent figyelembe vesz. Nyilván ügyelni kell a mérés megfelelő végrehajtására.

Tekintsük a továbbiakban azt, az egyszerűbb esetet, amikor a hajlítás és a csavarás független. Vizsgáljunk azt az esetet, amikor a külső terhelés azonosan nulla. Vizsgáljuk továbbá csak a hajlítást – a csavarásra a vizsgálat nagyon hasonló módon végezhető (ez pl. [8]-ban ez megtalálható). Ebben az esetben (IV.10) az alábbi formában írható fel:

$$z_e(y_e, \tau) = \int_0^{b/2} \left\{ C^{zz}(y_e, \eta_e) \left[ -m^*(\eta_e) \ddot{z}_e(\eta_e, \tau) \right] \right\} d\eta_e; \quad (IV.12)$$

A szakirodalom nyomán állítjuk, hogy ez az integrálegyenlet szétválasztható megoldással rendelkezik, azaz (ez, feltételezésünk szerint azonos a differenciálegyenletnél feltételezett megoldással):

$$z_e(y_e, \tau) = Z(y_e)T(\tau); \quad (IV.6)$$

A megoldások azonossága matematikai módszerekkel bizonyítható - ezzel azonban egyenértékű az a fizikai megfontolás, ami szerint egy folyamat különböző, de adekvát modellje szükségszerűen azonos eredményre kell, hogy vezessen! (IV.6)-ot (IV.12)-be helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{Z(y_e)} \int_0^{b/2} C^{zz}(y_e, \eta_e) Z(y_e) m^*(\eta_e) d\eta_e = \frac{1}{\omega^2} = -\frac{T}{\ddot{T}}; \quad (IV.13)$$

Az idő ( $\tau$ ) és a fesztáv menti koordináta ( $y_e$ ) független változók – (IV.13) bal oldala csak az helytől, a jobb oldala csak az időtől függ, ami pontosan akkor lehetséges, ha mindkét oldal egy, közös állandóval egyenlő (ez a korábban már bevezetett  $\omega^2$ ). (IV.13)-ból következik, hogy:

$$Z(y_e) - \omega^2 \int_0^{b/2} C^{zz}(y_e, \eta_e) Z(y_e) m^*(\eta_e) d\eta_e = 0; \quad (IV.14)$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0; \quad (IV.9)$$

A fenti differenciálegyenlet pár második tagja azonos a (IV.8) - (IV.9) differenciálegyenlet pár második tagjával. Hivatkozva az integrálegyenletek elméletéből

ismert Hilbet-Schmidt tételre, (IV.12)-nek végtelen sok sajátfüggvény ( $Z(y_e)$ ) és sajátérték ( $\omega$ ) megoldás-párja van - és ezek a megoldás-párok, mint már hangsúlyoztuk, azonosak (IV.8) lehetséges megoldás párjaival.

Ezen megoldás párok fenti sorrendben vett első tagját sajátlengésképnek, a másodikat sajátkörfrekvenciának nevezzük. A sajátlengésképekkel és a hozzájuk tartozó sajátkörfrekvenciákkal a mindennapokban is rendszeresen találkozunk.

Írjuk fel a (IV.14) egyenletet két, különböző sajátlengéskép-sajátkörfrekvencia párra:

$$Z_m(y_e) = \omega_m^2 \int_0^{b/2} C^{zz}(y_e, \eta_e) Z_m(y_e) m^*(\eta_e) d\eta_e ;$$

$$Z_n(y_e) = \omega_n^2 \int_0^{b/2} C^{zz}(y_e, \eta_e) Z_n(y_e) m^*(\eta_e) d\eta_e ;$$

ahol:  $m, n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  és  $m \neq n$

Szorozzuk meg az első egyenletet  $Z_n(y_e) m^*(y_e)$ -el, a másodikat  $Z_m(y_e) m^*(y_e)$ -el és integráljuk őket a fél fesztáv mentén:

$$\frac{1}{\omega_m^2} \int_0^{b/2} Z_n Z_m m^* dy_e = \int_0^{b/2} Z_n m^* \left( \int_0^{b/2} C^{zz}(y_e, \eta_e) Z_m m^* d\eta_e \right) dy_e ;$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} \int_0^{b/2} Z_m Z_n m^* dy_e = \int_0^{b/2} Z_m m^* \left( \int_0^{b/2} C^{zz}(y_e, \eta_e) Z_n m^* d\eta_e \right) dy_e ;$$

Megmutatható, hogy a fenti egyenletek jobb oldala - a hatásfüggvény szimmetriája miatt - azonos. Ezért:

$$\left( \frac{1}{\omega_m^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right) \int_0^{b/2} Z_m Z_n m^* dy_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{b/2} Z_m Z_n m^* dy_e = 0 ; \quad \text{hacsak } m \neq n \quad (\text{IV.15})$$

A (IV.13) nagyon fontos és tanulságos eredmény, a sajátlengésképek ortogonalitását fejezi ki. Azt mondja ki, hogy két, különböző sajátlengés funkcionálanalízisbeli értelemben vett skaláris szorzata, a megoszló tömeggel, mint matematikai értelemben vett súlyfüggvénnyel szorozva nulla. Ez, a funkcionálanalízisben a különböző sajátlengésképek ortogonalitását jelenti. Fizikai értelemben pedig azt az igen fontos tényt hangsúlyozza, hogy a sajátlengésképek egymástól függetlenek: egy sajátlengéskép nem hív elő egy másikat, közöttük energia csere nem valósul meg. Egyszerűbben fogalmazva, egy-egy rezonancia alak képes önállóan létezni. Erre pedig a valóságban számos példát láthatunk - elegendő lehet a fizika órákon bemutatott álló-hullámokra gondolni.

A fizikai munka az erő és az út skalár szorzataként számítható - ha az erő és az út egymásra merőleges, akkor nem végzünk fizikai munkát. Általánosabb értelemben ezt látjuk a sajátlengésképek ortogonalitása esetében is.

Ha feltesszük, hogy a nulladik sajátlengés:  $Z_0(y_e) \equiv 1$  és  $\omega_0 = 0$ , akkor ezzel egyrészt megnyitjuk a lehetőséget a merev szárny (repülőgép) számításba történő bevonására,

hiszen a fenti pár éppen egy nem deformálódó szárny (repülőgép) mozgásának egy szabadságfokát képes leírni. Másrészt (IV.15)-ből a következő egyenletre jutunk:

$$\int_0^{b/2} Z_n m^* dy_e = 0; \quad n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (\text{IV.16})$$

Ez a súlypont tétel néven ismert egyenlet, kimondja, hogy a sajátlengésekben a súlypont nem mozdul el. (A súlypont translációs mozgását éppen a nulladik sajátlengés kép segítségével vizsgálhatjuk.)

A fentiekben tárgyalt  $z_e = z_e(y_e, \tau)$  és  $\vartheta = \vartheta(y_e, \tau)$  rugalmas hajlító és csavaró deformáció függvényt - a sajátlengések és sajátkörfrekvenciák bevezetése után - az alábbi formában számítjuk:

$$z_e(y_e, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(y_e) \xi_i(\tau) \quad (\text{IV.17})$$

$$\vartheta(y_e, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i(y_e) \varsigma_i(\tau) \quad (\text{IV.18})$$

Mivel a hajlító ( $Z_i$ ) és a csavaró ( $S_i$ ) sajátlengéseket és sajátkörfrekvenciákat a szerkezet egyértelműen meghatározza, azért ezek előzetesen közelítő számítással, vagy a szerkezet elkészülte után mérésrel meghatározhatók. Ezek ismeretében azután a rugalmas mozgás vizsgálata negyedrendű, közönséges differenciálegyenletek (numerikus) megoldásával lehetséges. Ezekkel a módszerekkel részletesebben a vonatkozó szakirodalom foglalkozik.

## V. Merevségi és kiegyensúlyozási követelmények

Az aeroelasztikus jelenségek részletes vizsgálata rendkívül fontos és igényes tervezés esetén mindig meg is történik. Ugyanakkor felmerül az igény egyszerűbb, gyakorlatibb módszerek iránt - e módszerek részben ellenőrzésre, részben a részletes számítások helyettesítésére szolgálnak. Eszerint meg kell vizsgálni, hogy az (elkészült) repülőgép fő részei - szárny, törzs, kormányfelületek, kormánylapok stb. - eleget tesznek a későbbiekben bemutatandó merevségi követelményeknek. Ide vonatkozó - kicsit régebbi - szakirodalom [1], illetve [16].

A megfelelően nagy merevség biztosítja, hogy a repülés biztonságát veszélyeztető, bármely aeroelasztikus jelenség kialakulási sebessége elegendően nagymértékben haladja meg a repülőgép üzemszerűen előforduló legnagyobb repülési sebességét.

A kapcsolt lengések rendszerint aerodinamikai és tehetetlenségi úton kapcsolódnak. A kiegyensúlyozási vagy kiegyenlítési követelmények a tehetetlenségi kapcsolódás kizárását szolgálják. Ezzel tehát a kapcsolt lengés lényegében megszüntethető.

A merevségi követelményeket több, megtörtént eseményben károsodott repülőgép merevségi adatiból, illetve hosszú ideje esemény nélkül, biztonságosan repülő gépek merevségi adatai alapján állították össze. Ezek tehát statisztikai jellegű, fél-empirikus követelmények, melyek korlátozott megbízhatósággal rendelkeznek, illetve a megbízhatóságuk növelésén állandóan dolgoznak.

A merevségi és kiegyensúlyozási követelményekre a légi alkalmassági előírások kifejezetten támaszkodnak, példaként említjük a [17] kiadványt, ami az FAA ilyen típusú segédlete, kisrepülőgépek számára.

Az e pontban tárgyalandó követelmények különböző, mechanikai rendszerek összehasonlításán alapulnak. Az aeroelasztikus jelenségek szempontjából lényeges paraméterek:

$\ell$  - jellemző hosszúság [m];

$V$  - jellemző (itt repülési) sebesség [m/s];

$\rho$  - a levegő sűrűsége [kg/m<sup>3</sup>];

$\sigma$  - a szerkezeti anyag sűrűsége [kg/m<sup>3</sup>];

$K$  - jellemző rugóállandó (itt csavaró) [Nm/rad  $\Rightarrow$  kgm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>];

A fenti paraméterekből két, dimenziótlan mennyiség képezhető, amelyek segítségével további, származtatott jellemzők vizsgálhatók:

$$\rho/\sigma \text{ és } K/(\sigma \ell^3 V^2);$$

H. G. Küssner vizsgálatokat folytatott olyan repülőgépeken, amelyeken létrejött flutter, illetve olyanokon, amelyeknél nem jött létre flutter és az 1929-ben publikált eredménye szerint azt találta, hogy kiegyenlített kormánylap esetén flutter jön létre, ha az alábbi, dimenziótlan frekvencia kisebb, mint a kritikus érték:

$$k_{KR} > \frac{\omega h}{2V} \quad \text{ahol} \quad k_{KR} = 0.9 \pm 0.12; \quad (\text{V.1})$$

Az (V.1)-gyel definiált, dimenziótlan sajátkörfrekvencia – a nevezőben lévő 2-es állandótól eltekintve – a hasonlóság elméletből ismert, Strouhal számnak felel meg.

Az (V.1) kifejezésből rögtön következik, hogy – amennyiben a fenti kritérium alkalmazása mellett döntünk – a tervezett repülőgép bármely, üzemszerű sebességének kisebbnek kell lennie az alábbi, kritikus sebességénél:

$$V_{KR} = \frac{\omega h}{2k_{KR}}; \quad (\text{V.2})$$

Az (V.2) kifejezést a szakirodalomban gyakran „Küssner képlet” néven említik. A szárny legkisebb sajátkörfrekvenciája méréssel vagy számítással határozható meg. A húr hossz ( $h$ ) a lengést végző rész közepes húr hossza. Ezek alapján a kritikus sebesség egyszerűen számítható.

A legkisebb sajátkörfrekvencia a szerkezet merevségével arányosan változik. Ezért az (V.2)-ben megfogalmazott követelmény a bevezetőben leírtak szerint egy, a merevségre vonatkozó feltétellé írható át (feltesszük, hogy a  $\rho/\sigma$  mennyiség változása elhanyagolható):

$$\frac{K}{\sigma \ell^3 V^2} \geq \text{const} \Rightarrow \begin{cases} \frac{K_{\vartheta}}{\rho (b/2) h_A^2 V^2} \geq \text{const}, & (\text{csavarásra}); \\ \frac{K_h}{\rho (b/2)^3 V^2} \geq \text{const}, & (\text{hajlításra}); \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

ahol:

$K_{\vartheta}$  – a csavaró rugóállandó;

$K_h$  – a hajlító rugóállandó;

$b$  – a fesztáv;

$h_A$  – a közepes aerodinamikai húr;

Az (V.3) kifejezésben definiált hajlító, illetve csavaró merevséget az alábbi módon kell meghatározni:

$$K_{\vartheta} = \frac{\text{Nyomaték a szárnyvégen}}{\text{Elcsavarodás a szárnyvégen}};$$

$$K_h = \frac{\text{Maxiális hajlító nyomaték} \times \text{fél-fesztáv}}{\text{A szárnyvég lehajlása}};$$



A merevségi követelményekre vonatkozó, konkrét konstansok értéke több tényező (pl. a szerkezeti kialakítás, a rugalmas tengely helye, a súlypont helye, a tehetetlenségi nyomaték stb.) függvénye.

Az (V.3)-ban meghatározott forma helyett [16]-ban az alábbi alakú merevségi követelmények olvashatók:

$$\frac{K}{\sigma \ell^3 V^2} \rightarrow \frac{K}{\rho \ell^3 V^2} \leq const \Rightarrow \frac{1}{V} \sqrt{\frac{K}{\ell^3}} \leq \sqrt{\rho_0} \sqrt{const} = Konst. \quad (V.4)$$

Megjegyzendő, hogy (V.4)-ben, a jobb oldali, módosított kifejezés bal oldalán, a gyökjel alatt a nevezőben a jellemző méret harmadik hatványa áll - ezt [16] esetenként különböző módon állítja össze. A csűrőlapnál például egy fesztáv jellegű hosszúságot a csűrőlap közepes mértani húr hosszának négyzetével szorozza. Ez ugyanígy van a többi kormánylap (oldalkormánylap, magassági kormánylap, stb.) esetében is, de például a törzsnél a törzs hosszúságát értelemszerűen a vízszintes farokfelület vagy a függőleges farokfelület területével szorozza.

Ebben a jegyzetben konkrét számadatokat nem adunk meg, ezeket - szükség esetén - hiteles forrásból kell meríteni.

A kiegyenlítési követelmények a kormánylapokra vonatkoznak, és általánosságban azt írják elő, hogy a kormánylap súlyvonala vagy súlypontja a forgástengelyére essen. Ezzel kapcsolatban megjegyzendő, hogy teljes kiegyenlítésnek nevezzük, amikor a forgástengely és a súlyvonal azonos. Ezt a gyakorlatban elég nehéz elérni, ilyen kiegyenlítéssel ritkán találkozunk.



V.1. ábra: Tömegkiegyenlített magassági kormánylap

A második, sokkal gyakrabban alkalmazott megoldás olyan, hogy a kormánylapra, vagy a mozgó mechanizmusra külön kiegyenlítő tömeget erősítünk, és ezzel érjük el, hogy a kormánylap és a kiegyenlítő tömeg együttes súlypontja a forgástengelyre essen.

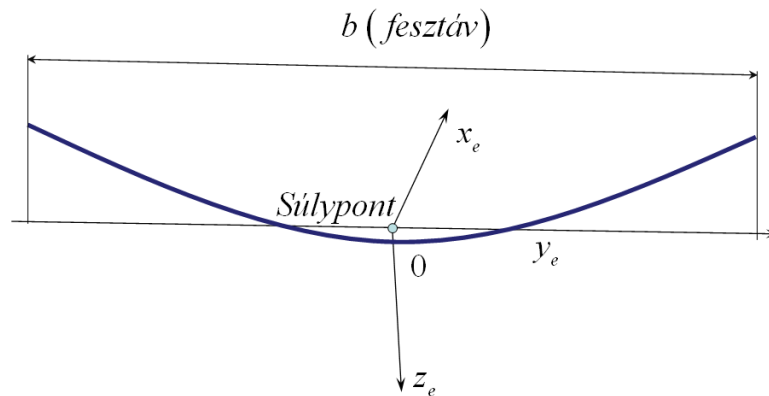
Tipikus példa erre sok, olyan magassági kormánylap (V.1. ábra), amelynek van egy, a forgástengely elé nyúló része. Ebbe, a rendszerint áramvonalazott részbe helyezik el a szükséges tömeget. Az ilyen felület egyébként a valamennyi kormányerő csökkentését is előidézi – ez, természetesen nem eleve jó, ezt a hatást vizsgálni kell!

Fontos hangsúlyozni, hogy a kiegyenlítő súlyt viszonylag gyakran helyezik el a kormánymozgató rudazaton. Néha, amikor nem ismerik fel ennek az esetleg távolabb elhelyezett tömegnek a jelentőségét, illetve a szerepét és esetleg eltávolítják, komoly baleset lehetőségét idézik elő.

## VI. Rugalmas repülőgép – számítási példa

Az I.1. ábra „IV” jelű területére esik a rugalmas repülőgép viselkedésének vizsgálata. Ez elvileg mindent (a merev és a rugalmas hatásokat, dinamikai terhelést stb.) magában foglal és ezért általában igen bonyolult vizsgálatokat jelent. Éppen ezért itt csak egy, nagyon egyszerű példát mutatunk be: egy vitorlázó repülőgép súlypontjának és a szárnyának viselkedését vizsgáljuk, miközben a repülőgép a nyugodt atmoszférából egy szellőkésbe repül be.

A repülőgépet egy vonallal helyettesítjük – ezt a vonalat a VI.1. ábrán tüntettük fel. A vonal hordozza a repülőgép tehetetlenségi, aerodinamikai és szilárdsági tulajdonságait. Emellett feltételezzük, hogy az  $y_e$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték olyan nagy, hogy a törzs hosszdőlése a vizsgált folyamat során – ez a folyamat egyébként 10 másodperc körüli ideig tart - nem változik, illetve eközben a repülőgép vízszintes sebessége is állandó marad.



VI.1. ábra: Rugalmas repülő egyszerű modellje

A VI.1. ábráról már látható: a rugalmas repülőgép mozgását a súlypontja mozgásának – ez a merev repülőgép mozgásának felel meg – és a rugalmas deformációkból következő mozgásoknak az eredőjeként vizsgáljuk.

A repülőgépet helyettesítő rugalmas vonalat, szilárdsági szempontból a hajlító merevsége jellemzi. Ennek konkrét értékeit a VI.1. táblázatban tüntettük fel. A rugalmas vonal időben változó deformációját a (IV.1) negyedrendű, parciális differenciálegyenlet segítségével vizsgáljuk:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_e^2} \left( IE \frac{\partial^2 z_e}{\partial y_e^2} \right) = p_z(y_e, \tau) - m^* \frac{\partial^2 z_e}{\partial \tau^2}; \quad (IV.1)$$

A (IV.1) megoldása – tekintettel arra, hogy az „IE” hajlító merevség általában a hely függvényében ( $y_e$ ) változik, célszerűen a sajátlengéseképek segítségével történhet. Vizsgáljuk (IV.1)-et, abban az esetben, amikor nincs külső terhelés:

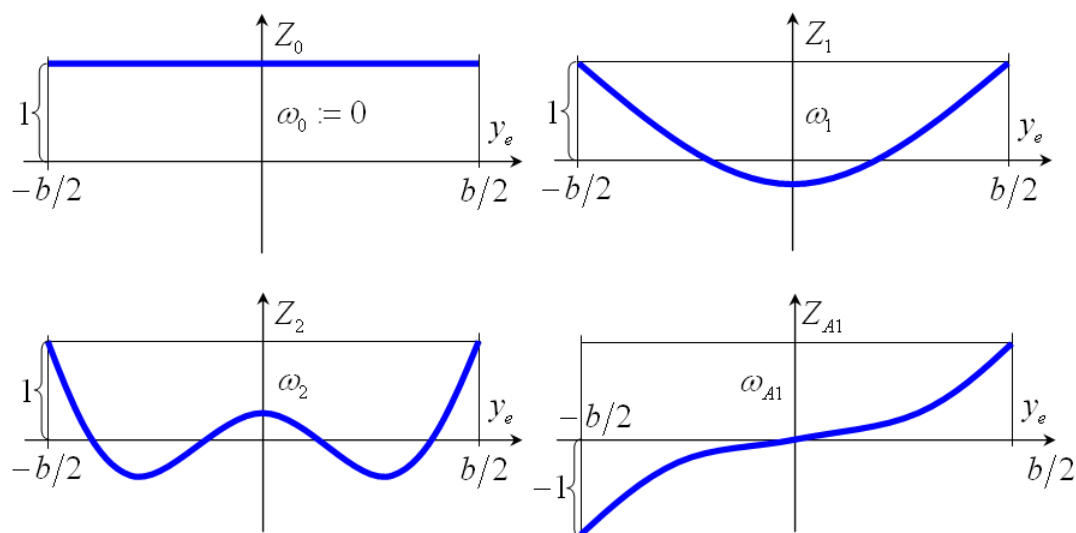
$$\frac{\partial^2}{\partial y_e^2} \left( IE \frac{\partial^2 z_e}{\partial y_e^2} \right) = \omega^2 = -m^* \frac{\partial^2 z_e}{\partial \tau^2}; \quad (IV.5)$$

A fenti egyenlet bal oldala csak a hely, a jobb oldal csak az idő függvénye – ezért ezek egy közös állandóval egyenlőek. Ez az állandó a sajátkörfrekvencia négyzete. Sajátkörfrekvenciából végtelen sok van (a számosság a természetes számok számossága).

Tegyük fel továbbá, hogy a  $z_e = z_e(y_e, \tau)$  hajlító deformáció függvény sorozatként (a sorozat tagjai függvény-szorzatok) írható fel, ahol az egyik tag csak a hely, a másik csak az idő függvénye:

$$z_e(y_e, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(y_e) T_i(\tau); \quad (\text{VI.1})$$

Ezek szerint (VI.1) a (IV.6) kifejezés módosított formája, benne a „ $Z_i(y_e)$ ” az  $i$ -edik, az  $\omega_i$  sajátkörfrekvenciához tartozó sajátlengésképet jelenti. Vagyis (VI.1) azt fejezi ki, hogy a szárny tetszőleges, görbült alakját a sajátlengésképek lineáris kombinációjaként állítjuk elő (elvileg pontosan, gyakorlatilag valamilyen közelítéssel, aszerint, hogy a végtelen sorozat hány tagjával számolunk valójában). A lineáris kombináció együtthatói, a „ $T_i(\tau)$ ” mennyiségek az idő függvényei, így képesek jellemezni az időben változó alakokat. A szárny deformált alakját a sajátlengésképek által kifeszített függvény-térben keressük (e tér bázisa a sajátlengésképek halmaza), úgy, hogy az egyes bázis függvényeket a hozzá tartozó koordinátával szorozzuk. A „ $T_i(\tau)$ ”-t egyébként általánosított koordinátának is szokás nevezni, mert az Euler-Lagrange féle variációs tárgyalásmódban ezek a mennyiségek lehetnek az általánosított koordináták.



VI.2. ábra: Sajátlengésképek és sajátkörfrekvenciák

A VI.2. ábrán néhány sajátlengésképet tüntettünk fel. Az ábra bal, felső részén a nulladik sajátlengéskép látható: ez, definíció szerint legyen az azonosan egyenlő egy, illetve a hozzá tartozó sajátkörfrekvencia legyen, megint definíció szerint, nulla. Ez felel meg a merev repülőgépnek – nyilvánvalóan, hiszen pontosan a merev szárny az, ami nem deformálódik.

Az ábra jobb, felső rész ábráján az első, szimmetrikus saját lengéskép látható. A számpéldában szereplő repülőgép szárny esetére meghatározott első szimmetrikus, saját lengéskép számértékeit és az első saját körfrekvenciát a VI.1 táblázatban tüntettük fel. Ennek a saját lengésképnek a fél szárnyon egy csomópontja van – ez a pont a lengéskép és a vízszintes tengely metszéspontja, ez a pont a lengés során helyben marad.

Az ábra bal, alsó rész ábráján a második, szimmetrikus saját lengéskép látható. A számértékeit és a második saját körfrekvencia értékét szintén a VI.1 táblázat tartalmazza. A második szimmetrikus saját lengésképnek a fél szárnyon pontosan két csomópontja van. A további, szimmetrikus saját lengésképek csomópontjainak száma a fentiek megfelelően adódik. A számpéldában az nulladik, első és második szimmetrikus saját lengésképpel számolunk.

A VI.2. ábra jobb alsó rész ábráján, a teljesség kedvéért feltüntettük az első, ferdén szimmetrikus saját lengésképet is. Amennyiben általános mozgást vizsgálunk, akkor erre, illetve további ferdén szimmetrikus saját lengésképekre (és az ezekhez tartozó saját körfrekvenciákra is) szükség lenne.

A saját lengésképeket meghatározhatjuk számítással (VII. pont) vagy méréssel is. A mérés sok szempontból előnyös, hacsak mód van rá, a saját lengéskép-saját körfrekvencia párokat mérni kell.

Tegyük fel tehát, hogy a saját lengéskép-saját körfrekvencia párok rendelkezésre állnak. Ekkor, (IV.5)-öt bármely saját lengésre felírhatjuk:

$$\frac{d^2}{d y_e^2} \left( IE \frac{d^2 Z_i}{d y_e^2} T_i \right) = -m^* Z_i \ddot{T}_i = m^* \omega_i^2 Z_i T_i ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (\text{VI.2})$$

A (VI.2) jobb oldalának felírásakor figyelembe vettük (IV.9)-et, az általánosított koordináta idő szerinti második deriváltját eszerint számítottuk ki. Összegezzük az összes saját lengésre felírt egyenletet:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^2}{d y_e^2} \left( IE \frac{d^2 Z_i}{d y_e^2} T_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} m^* \omega_i^2 Z_i T_i ; \quad (\text{VI.3})$$

de :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^2}{d y_e^2} \left( IE \frac{d^2 Z_i}{d y_e^2} T_i \right) = \frac{d^2}{d y_e^2} \left( IE \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{d^2 Z_i}{d y_e^2} T_i \right) \right) = \frac{\partial^2}{\partial y_e^2} \left( IE \frac{\partial^2 z_e}{\partial y_e^2} \right) ;$$

ezért :

$$\frac{\partial^2}{\partial y_e^2} \left( IE \frac{\partial^2 z_e}{\partial y_e^2} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} m^* \omega_i^2 Z_i T_i ; \quad (\text{VI.4})$$

Végeredményben tehát a (IV.1) egyenlet bal oldalát helyettesíthetjük (VI.4) jobb oldalával. Írjuk fel (IV.1)-et ezzel a helyettesítéssel, illetve a saját lengésképek és saját körfrekvenciák segítségével:

$$\sum_{i=0}^{\infty} m^* \omega_i^2 Z_i T_i = p(y_e, \tau) - \sum_{i=0}^{\infty} m^* Z_i \ddot{T}_i ; \quad \int_{-b/2}^{b/2} ( ) Z_j dy_e \quad (\text{VI.5})$$

A (VI.5) kifejezés felírásakor egyúttal a következő lépést is meghatároztuk: szorozzuk meg az egyenlet minden tagját a  $j$ -edik sajátlengésképpel és integráljuk a teljes fesztáv mentén. Ekkor, a sajátlengésképek ortogonalitása ( $\rightarrow$  IV.15) miatt (VI.5) az alábbi másodrendű, közönséges differenciálegyenlet rendszerre írható át:

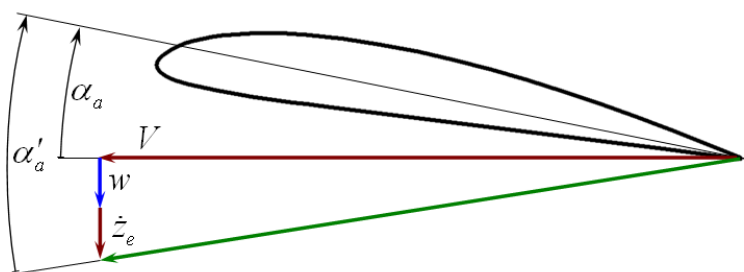
$$M_j \ddot{T}_j + M_j \omega_j^2 T_j = Q_j ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (\text{VI.6})$$

$$\text{ahol: } M_j = \int_{-b/2}^{b/2} m^* Z_j Z_j dy_e \quad \text{és} \quad Q_j = \int_{-b/2}^{b/2} p(y_e, \tau) Z_j dy_e ;$$

(VI.6)-ban „ $M_j$ ” a  $j$ -edik általános tömeg és „ $Q_j$ ” a  $j$ -edik általános erő. Ezzel, az idő függvényében változó általános koordináták ( $T_j$ ) felhasználásával, a legegyszerűbb, rugó-tömeg lengését leíró differenciálegyenlettel formailag azonos, differenciálegyenlet rendszerre jutottunk, ahol a tömeg helyére a  $j$ -edik általános tömeg, az erő helyére a  $j$ -edik általános erő és a rugóállandó helyére a „ $M_j \omega_j^2$ ” általánosított rugóállandó írandó. Ez az általánosított rugóállandó – a (VI.1) kifejezésnél bemutatottak szerint – hordozza a hajlítómerevség  $j$ -edik sajátlengésben kifejtett hatását.

A későbbiekben bemutatandó számpéldában látható lesz, hogy a (VI.6) nem szimultán differenciálegyenlet rendszer: az általánosított erő számításában – általában – minden általánosított koordináta (idő szerinti deriváltja) szerepel, így a (VI.6) differenciálegyenlet rendszer minden figyelembe vett tagját együtt kell megoldani.

A repülőgépet aerodinamikai szempontból egy „hordozó vonal”-al helyettesítjük, a hordozó vonal jellemzőit a véges szárnyak elméletének megfelelően, a Prandtl-Galuert integro-differenciál egyenlet Trefftz féle megoldása szerint számítjuk. A repülőgép aerodinamikai adatait, nevezetesen a húrhosszat és a felhajtóerő tényező iránytangensét a VI.1. táblázatban tüntettük fel. Ez azt is jelenti, hogy aerodinamikai szempontból a vizsgálatot a lineáris tartományra korlátozzuk. Illetve ebben a példában, az egyszerűség kedvéért, az insztacioneritás hatásának figyelembe vételétől eltekintünk.



VI.3. ábra: A szárnymetszetek állásszöge

A szárnyon keletkező, megoszló felhajtó erőt – a fent említett, hordozó vonal elmélet szerint az alábbi formulával határozzuk meg:

$$p_L(y_e, \tau) = -\frac{\rho}{2} V^2 c_L h = -\frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \alpha'_a h \cong -\frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \left( \alpha_a + \frac{w}{V} + \frac{\dot{z}_e}{V} \right) h; \quad (\text{VI.7})$$

A (VI.7) kifejezésben a „ $w$ ” a példában szereplő, függőleges szélökés sebessége, „ $\dot{z}_e$ ” pedig a szárny adott helyen lévő rugalmas deformációjának sebessége. E két hatás együtt – hacsak az instacionaritástól, mint korábban már kikötöttük eltekintünk – jelenti azt az állásszög változást, amit az abszolút állszöghöz ( $\alpha_a$ ) adva a tényleges, működési állásszöget ( $\alpha'_a$ ) kapjuk. Ezzel számítható a külső megoszló terhelés felhajtóerőből származó része. Innen az is következik, hogy a számpéldánkban a légellenállás hatásának figyelembe vételétől eltekintünk.

Esetünkben a tehetetlenségi jellemző a megoszló tömeg: ezt a fesztáv mentén osztjuk el, úgy, hogy a teljes fesztávra vett integrálja legyen egyenlő a teljes repülőgép tömegével. A megoszló tömeget ( $m^*$ ) is a VI.1. táblázatban tüntettük fel. Középen (a szimmetria síkban) ennek értéke – a többi értékkel összehasonlítva – igen nagy, azért, mert a szárnyon kívüli összes további tömeget ide koncentráltuk.

Az eredő, külső, megoszló terhelést – ez szerepel az általános erő számítására szolgáló kifejezésben ( $\rightarrow$  VI.6) – a felhajtóerőből származó rész és a megoszló súlyerő eredőjeként határozhatjuk meg:

$$p(y_e, \tau) = p_L(y_e, \tau) + m^* g; \quad (\text{VI.8})$$

A sajátlengésképek ismeretében ( $\rightarrow$  VI.1. táblázat) felírhatjuk az általános erők kifejezéseit:

$$Q_j = \int_{-b/2}^{b/2} p(y_e, \tau) Z_j dy_e; \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (\text{VI.9})$$

$$\text{ahol: } p(y_e, \tau) = m^* g - \frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \left( \alpha_a + \frac{w}{V} + \frac{1 \cdot \dot{T}_0 + Z_1 \dot{T}_1 + Z_2 \dot{T}_2 + \dots}{V} \right)$$

A (VI.9) kifejezés felírásakor, a rugalmas deformáció sebességét ( $\dot{z}_e$ ) a sajátlengések és az általános koordináták szorzataként írtuk fel ( $\rightarrow$  VI.1). A képletben a végtelen összegre utaló három pont szerepel ugyan, de a három tagot (nulladik, első és második) pontosan azért írtuk fel, mert a számpéldában ezeket vesszük tekintetbe, a többi tagot elhanyagoljuk. Ez egyébként joggal megtehető, hiszen a tapasztalatok szerint a magasabb lengésképek figyelembe vétele a számítás pontosságát már jelentősen nem növeli.

## VI.1 Számpélda

Az általános bevezető után a konkrét számításokra térünk át. Ebben – mint már említettük – egy vitorlázó repülőgépet vizsgálunk. A repülőgép bennünket érintő adatait a VI.1. táblázatban tüntettük fel.

VI.1. Táblázat

Fesztáv menti koordináta $y_e$ [m]										
$y_e$	0	0.833	1.667	2.5	3.333	4.167	5.0	5.833	6.667	7.5
Húrhossz $h$ [m]										
$h$	1.143	1.065	0.9874	0.909	0.832	0.754	0.676	0.599	0.521	0.443
A felhajtóerő tényező iránytangense $c_L^\alpha$ [1/rad]										
$c_L^\alpha$	5.905	5.854	5.799	5.737	5.663	5.568	5.435	5.21	4.66	0
A repülőgép megoszló tömege $m^*$ [kg]										
$m^*$	286	18	13.6	12	10.5	8.7	7.3	6.2	5.5	4.8
A szárny hajlító merevsége $IE$ [Nm <sup>2</sup> ]										
$IE$	1.3e6	9.9e5	7.3e5	5.3e5	3.7e5	2.5e5	1.6e5	9.9e4	5.6e4	2.9e4
A nulladik, az első és a második sajátlengéskép ( $\omega_0 = 0$ , $\omega_1 = 14.06$ és $\omega_2 = 52.3$ [r/s])										
$Z_0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_1$	-0.104	-0.098	-0.064	-0.003	0.0879	0.211	0.368	0.556	0.771	1.0
$Z_2$	0.11	0.055	-0.069	-0.24	-0.416	-0.526	-0.485	-0.217	0.304	1.0

A repülőgép teljes tömegét a megoszló tömeg fesztáv menti (numerikus) integrálásával határozzuk meg:

$$m_{RG} = \int_{-b/2}^{b/2} m^* dy_e = 351 [kg];$$

Az elcsavaratlan, azonos profilokból felépülő szárny minden metszetének abszolút állásszöge ( $\alpha_a$ ) azonos lesz. Válasszuk a repülés sebességét:  $V = 25$  [m/s]-ra, akkor a széllelésbe történő berepülés előtti, egyensúlyi repülés közös állásszöge:

$$G - L = 0 \Rightarrow \alpha_a = \frac{m_{RG} g}{\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha h dy_e} \cong 0.14 [rad] \quad (VI.10)$$

A bevezetőben is kimondott feltételek szerint az abszolút állásszög, illetve a repülési sebesség a folyamat során nem változik. A következőkben definiáljunk egy felfele ható széllelést, úgy, hogy annak sebessége a számolási idő kezdetéig nulla, nulla időtől 10 m/s étékig lineárisan nő, és ezután állandó marad (a szélsébség a koordináta rendszer  $z_e$  tengelyének irányítása miatt negatív lesz):



$$w(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \tau < 0; \\ -25 \cdot \tau & \text{ha } 0 \leq \tau \leq 10/25; \\ -10 & \text{ha } \tau > 10/25; \end{cases} \quad (\text{VI.11})$$

Megjegyezzük, hogy ez a szélökés, illetve a sebesség profilja közelebb áll a valósághoz, mint a szakirodalomban (pl. légialkalmassági előírások) általában alkalmazott, ún. „éles szélű” szélökés. Persze, az említett légialkalmassági előírásokban az éles szélű szélökéshez különböző, csökkentő tényezőket is rendelnek, vagyis, végeredményben az ottani számolás is a mienkhez hasonló eredményre vezet.

Első lépésben számoljunk csak a nulladik sajátlengéssel. Ebben az esetben csak a nulladik általános tömeggel kell dolgoznunk:

$$M_0 = \int_{-b/2}^{b/2} m^* \cdot 1 \cdot dy_e = 351 [kg] = m_{RG}; \quad (\text{VI.12})$$

Ez, mivel a nulladik sajátlengéskép az azonosan egyenlő egy értékkel bír, éppen a repülőgép tömegével egyenlő. Illetve (VI.6) nulladik tagjának a bal oldala – mivel a nulladik sajátkörfrekvencia nulla – nulla lesz. Határozzuk meg a nulladik általános erőt is:

$$Q_0 = \int_{-b/2}^{b/2} p(y_e, \tau) \cdot 1 \cdot dy_e = \int_{-b/2}^{b/2} \left[ m^* g - \left( \frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \left( \alpha_a + \frac{w}{V} + \frac{\dot{T}_0}{V} \right) h \right) \right] dy_e; \quad (\text{VI.13})$$

$$\text{mivel } \int_{-b/2}^{b/2} \left( m^* g - \frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \alpha_a h \right) = W - L = 0, \text{ azért:}$$

$$Q_0 = -Va_{00}w - Va_{00}\dot{T}_0; \quad \text{ahol: } a_{ij} = \frac{\rho}{2} \int_{-b/2}^{b/2} c_L^\alpha Z_i Z_j h dy_e \quad (\text{VI.14})$$

Az általános erő számításakor bevezettük az „ $a_{ij}$ ” együtthatókat: ezek a későbbi számolásokban is célszerűen használhatók lesznek majd. Az értékük itt, a (VI.14) kifejezésben, amikor a nulladik – tehát azonosan egy értékű – sajátlengésképpel kell számolni, egyszerűen a felhajtóerő tényező iránytangensének és a húr szorzatának fesztáv menti integrálja lesz. A számértékeket (VI.14) alapján határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} a_{00} &\cong 40, & a_{01} = a_{10} &\cong 5.55, & a_{11} &\cong 3.79; \\ a_{02} = a_{20} &\cong -6.53, & a_{12} = a_{21} &\cong -0.74, & a_{22} &\cong 4.05; \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

Visszatérve a nulladik sajátlengéskép esetére, a (VI.14) szerint adódó mozgásegyenlet:

$$M_0 \ddot{T}_0 = m_{RG} \ddot{T}_0 = Q_0 = (-w - \dot{T}_0) a_{00} V \Rightarrow \begin{cases} \dot{T}_0 = u_0; \\ \dot{u}_0 = -\frac{w + u_0}{m_{RG}} a_{00} V; \end{cases} \quad (\text{VI.16})$$

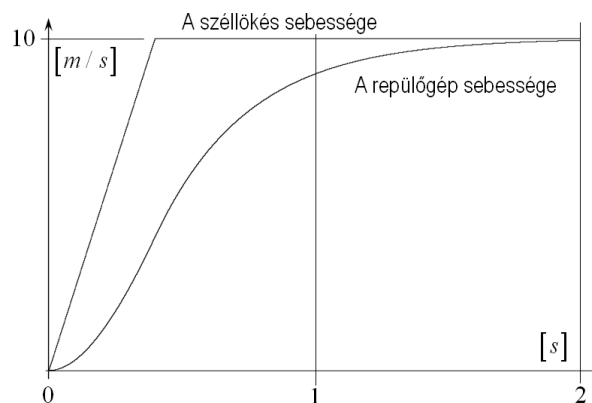
A (VI.16) kifejezés Newton második törvényének felel meg, fizikai szempontból pedig azt fejezi ki, hogy a repülőgép függőleges gyorsulása a repülőgépre ható légerők súlyerő

feletti részével arányos. Ezt az egyenletet közvetlenül is felírhattuk volna – ahogyan azt a repülés mechanikában általában meg is teszik. A mi vizsgálatunkban azonban ez az egyenlet egyszerűsítés révén adódott és tulajdonképpen csak annak bemutatására szolgál, hogy az általunk alkalmazott, általános erőkön, általános tömegeken és általános rugóállandón alapuló modell – a megfelelő egyszerűsítések megtétele után – jól ismert alapesetre vezet. Ez, természetesen semmit sem bizonyít, csak valószínűsíti, hogy az általunk alkalmazott modell más, bonyolultabb esetekben is jól használható lesz. A bizonyítás egyébként a fentiekben már megtörtént, ez az egyszerű vizsgálat alapvetően a bizalom erősítést szolgálja.

A (VI.16) kifejezésben először egy másodrendű, közönséges differenciálegyenletet írtunk fel, de ezt az „  $u_0 = u_0(\tau)$  ” bevezetésével két elsőrendű, közönséges differenciálegyenletre vezettük vissza. A (VI.16)-ból elegendő csak az új függvényt meghatározni – ez a repülőgép függőleges sebessége lesz, az idő függvényében. A megoldást, a legegyszerűbb, Euler módszer alkalmazásával numerikusan határoztuk meg:

$$u_0(\tau + \Delta\tau) = u_0(\tau) + \dot{u}_0(\tau)\Delta\tau; \quad (\text{VI.17})$$

Mivel (VI.16) második, megoldandó része elsőrendű differenciálegyenlet, azért a megoldáshoz egy kezdeti feltételt kell megadni. Ebben az esetben biztosan igaz, hogy a nulla pillanatban a repülőgépnek a függőleges sebessége nulla, azaz:  $u_0(0) = 0$ . A numerikus számolás végeredménye a VI.4. ábrán látható:



VI.4. ábra: A szárnymetszetek állásszöge

A (VI.16)-ot egyébként zárt alakban is meg lehetne oldani, most csak a numerikus megoldással foglalkozunk, azért, mert a későbbiekben is ez a módszer lesz jól alkalmazható: érdekes módon, a zárt alakú megoldás a rugalmas repülőgép esetében – az ott adódó numerikus problémák miatt – általában kevésbé lesz pontos, mint az eleve numerikus megoldás, illetve a zárt alakú megoldás megkeresése jóval több energiát is igényel.

A VI.4. ábrán látható, hogy a repülőgép sebessége (a repülőgép merev, tehát „a repülőgép sebessége” bármely pontjának a sebességét jelenti, jelentheti) az idő

növekedésével aszimptotikusan tart a szélleőkés sebességéhez. Az ábrán feltüntetett 2 másodperces időpillanatban már alig van különbség – vagyis a folyamat elég rövid ideig tart ahhoz, hogy a sebesség és állásszög változás elhanyagolása valóban megengedhető legyen.

Egy másik érdekes sajátosság az, hogy a repülőgép sebességét leíró görbének inflexiós pontja van, azaz alulról domború jellegről alulról homorúvá válik, ahogyan ez a folyamat fizikájából következik is.

A repülőgép a szélleőkésbe történő berepülés során felfele gyorsul. Ennek a gyorsulásnak a maximális értéke  $a_{\max} \cong 17 [m/s^2]$ , körülbelül a 0.4 másodperc időnél következik be.

A megoszló terhelés egyszeres integrálásával a nyíróerőhöz, a nyíróerő integrálásával pedig a hajlító nyomatékhoz jutunk:

$$V(y_e, \tau) = \int_{b/2}^{y_e} p(\eta_e, \tau) d\eta_e; \quad \text{és} \quad M(y_e, \tau) = \int_{b/2}^{y_e} V(\eta_e, \tau) d\eta_e; \quad (\text{VI.18})$$

A hajlító nyomaték a szárnytőben, egyenletes sebességű vízszintes repülésben:  $M_{i0} \cong 2810 [Nm]$ , a legnagyobb gyorsulás pillanatában pedig  $M_{i0\text{MAX}} \cong 8680 [Nm]$ .

Ezek szerint az igénybevétel a legnagyobb gyorsulású pontban körülbelül háromszorosa az egyenletes repülésben fellépő értéknek. Ez még nem igazi dinamikai terhelés, hiszen ebben a számításban a szárnyat teljesen merevnek tételeztük fel.

Tekintsük most a rugalmas repülőgépet, és tegyük fel, hogy a nulladik, az első és a második sajátlengéskép alkalmazásával elegendően pontos eredményre jutunk. Ellenkező esetben természetesen több sajátlengéssel is számolhatnánk.

A számításban szükség lesz az első és második általánosított tömegre is. Ezeket (VI.6) szerint határozhatjuk meg (a számolásban a VI.1. táblázat adatait használtuk):

$$M_0 = m_{RG} = 351, \quad M_1 \cong 17.42 \quad \text{és} \quad M_2 \cong 17.73; \quad (\text{VI.19})$$

A (VI.19)-ben, a rend kedvéért mindhárom általános tömeg értékét megadtuk. Érdekes, hogy az első és második általános tömeg értéke egymáshoz viszonylag közel esik – ez a konkrét számámolásból következik így.

Írjuk fel – (VI.6) felhasználásával – az általunk választott esetre érvényes egyenleteket:

$$\begin{aligned} M_0 \ddot{T}_0 &= Q_0; \\ M_1 \ddot{T}_1 + M_1 \omega_1^2 T_1 &= Q_1; \\ M_2 \ddot{T}_2 + M_2 \omega_2^2 T_2 &= Q_2; \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

(VI.20) három, másodrendű, közönséges differenciálegyenletből álló rendszer. Ezt a korábban is alkalmazott módszerrel hat, elsőrendű differenciálegyenletre vezethetjük vissza:

$$\begin{aligned} \dot{T}_0 &= u_0 ; & M_0 \dot{u}_0 &= Q_0 ; \\ \dot{T}_1 &= u_1 ; & M_1 \dot{u}_1 + M_1 \omega_1^2 T_1 &= Q_1 ; \\ \dot{T}_2 &= u_2 ; & M_2 \dot{u}_2 + M_2 \omega_2^2 T_2 &= Q_2 ; \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

A megoldáshoz hat kezdeti feltételre van szükség. Első lépésben állapítsuk meg az alábbi négy kezdeti feltételt:

$$u_0(0) = u_1(0) = u_2(0) = 0 \quad \text{és} \quad T_0(0) = 0 ; \quad (\text{VI.22})$$

A kezdeti feltételek közül az első háromról rögtön belátható, hogy azok – mint a megfelelő mozgások sebességei – a nulla időpillanatban tényleg nullák. A negyedik tag, a merev repülőgép elmozdulása a nulla időpontban szintén nulla.

A maradék két kezdeti feltétel meghatározásához induljunk ki (VI.20) második és harmadik tag egyenletének az egyensúlyi repülésre vonatkozó speciális alakjából, amikor tehát nincs szellőkés és nincs függőleges sebesség és gyorsulás sem. Ekkor:

$$\begin{aligned} M_1 \omega_1^2 T_1 &= Q_1 ; & \text{ahol} : Q_1 &= \int_{-b/2}^{b/2} \left( m^* g - \frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \alpha_a h \right) Z_1 dy_e ; \\ M_2 \omega_2^2 T_2 &= Q_2 ; & \text{ahol} : Q_2 &= \int_{-b/2}^{b/2} \left( m^* g - \frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \alpha_a h \right) Z_2 dy_e ; \end{aligned} \quad (\text{VI.23})$$

A súlypont tétel miatt a (VI.23)-ban szereplő általános erők integráljának első tagja nulla lesz, ezzel a következő eredményre jutunk:

$$T_1 = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \left( -\frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \alpha_a h \right) Z_1 dy_e}{M_1 \omega_1^2} \quad \text{és} \quad T_2 = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \left( -\frac{\rho}{2} V^2 c_L^\alpha \alpha_a h \right) Z_2 dy_e}{M_2 \omega_2^2} ; \quad (\text{VI.24})$$

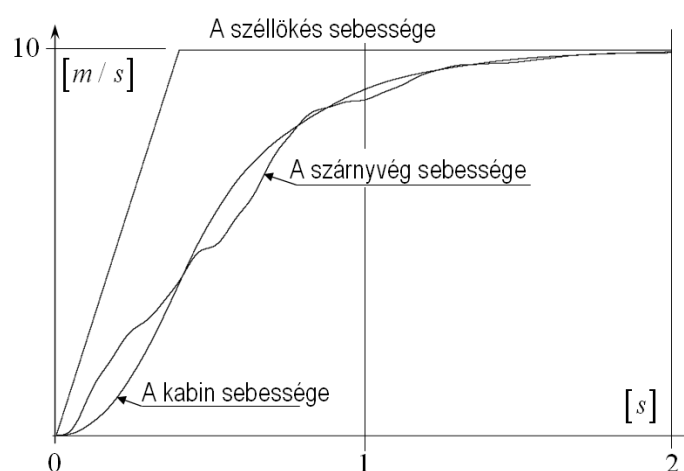
A (VI.24) kifejezés azt jelenti, hogy – mivel  $Z_1$  és  $Z_2$  egyaránt a szárnyvég kitérésre normált sajátlendéskép, vagyis mindkettő értéke a szárnyvégeken egy ( $Z_1(b/2) = Z_1(-b/2) = 1$  és  $Z_2(b/2) = Z_2(-b/2) = 1$ ) – hogy az egyensúlyi repülésben a felhajtóerő hatására, az első sajátlendésben a szárnyvég  $Z_1 T_1$ , a második sajátlendésben  $Z_2 T_2$ , illetve eredőben  $Z_1 T_1 + Z_2 T_2 = 1 \cdot T_1 + 1 \cdot T_2 = T_1 + T_2$  kitéréssel bír. Illetve a sajátlendések esetében a súlyerő – éppen a súlypont tétel miatt – nem okoz deformációt.

Számoljuk ki a (VI.24) kifejezés két tagjának a számértékét (az általános tömegeket a (VI.19) kifejezésben, a többi adatot a VI.1. táblázatban adtuk meg.):

$$\begin{aligned} T_1 &\cong -0.139 \quad \text{és} \quad T_2 \cong 0.012 \Rightarrow T_1 + T_2 \cong -0.127 ; \\ \text{illetve} : Z_1(b/2) T_1 + Z_2(b/2) T_2 &= 1 \cdot T_1 + 1 \cdot T_2 \cong -0.127 [m] ; \end{aligned} \quad (\text{VI.25})$$

A (VI.25) kifejezésben adott értékek egyrészt kezdeti feltételként alkalmazhatók a rugalmas repülőgép számításában, másrészt a szárny légerők következtében előálló deformációját is kiszámíthatjuk így.

Feltéve, hogy a súlyerő, a légerők valamint a tehetetlenségi erők okozta deformációk szuperponálhatók, az egyensúlyi repülésben a szárnyvég teljes deformációja kiszámolható, ha a megoszló súly miatti lehajlást a (VI.25) –ben adott, légerők okozta rugalmas deformációhoz hozzáadjuk. A megoszló súlyerő okozta deformáció pl. (IV.1) szerint számítható – (IV.1) –ből a szükségtelen tagokat el kell hagyni. Ez a számérték  $+0.052 [m]$ . Külön hangsúlyoztuk a pozitív előjelet, mivel biztos, hogy a szárny a súlyerő következtében lehajlik. Állandósult repülésben a szárny teljes deformációja tehát:  $-0.075 [m]$ ; ez tehát felfele irányul (felhajlás).



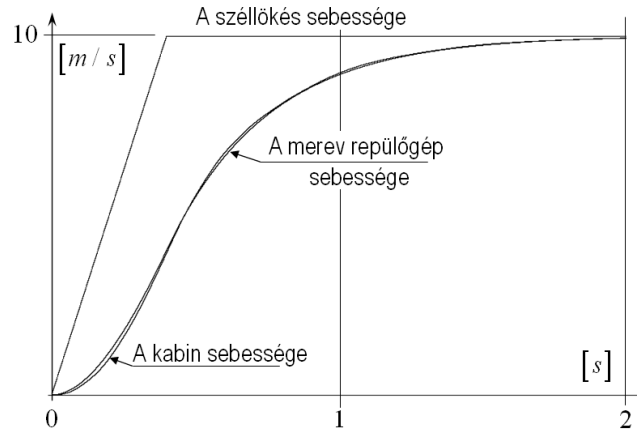
VI.5. ábra: A szárnymetszetek állásszöge

A (VI.21) –ben adott hat, elsőrendű, közönséges differenciálegyenletet a (VI.17) –ben leírt, Euler módszer értelemszerű alkalmazásával ismét numerikusan integráljuk. A számolás végeredménye a VI.5. ábrán látható.

A VI.5. ábrán a kabin ( $y_e = 0$ ) sebességét és a szárnyvég sebességét ( $y_e = b/2$ ) tüntettük fel. A számítás alapján, természetesen bármely fesztáv menti pont sebességét meghatározhatjuk – ebben, a bemutató jellegű példában ezzel a két, jellegzetes ponttal megelégszünk.

A kabin sebességfutását bemutató görbe nagyon hasonlít a VI.4. ábrán látható, merev repülőgép (egész repülőgép, tehát a kabin is) sebesség görbére. A két görbét együtt a VI.6. ábrán tüntettük fel.

A két görbe közti a legfontosabb különbség – véleményünk szerint – az, hogy a kezdeti pillanatokban a rugalmas repülőgép kabinja „lemarad” a merev repülőgéphez képest. Ez pedig azért van így, mert a VI.5. ábráról láthatóan, a szellőkésben először a szárnyvég lendül fel – és így, a súlypont tétel miatt a kabin (a szárnyközép) valamelyes lefelé mozgás-részt is kap.



VI.6. ábra: Sebességek összehasonlítása

A VI.5. ábra talán legfontosabb tanulsága, hogy a szárnyvég, a szellőkésbe repülés folyamán a kabin helyzete körül leng – jelen példában kétféle körfrekvenciával, ami a „A szárnyvég sebessége” feliratú görbéről látható is. Hasonlóképpen fontos észrevenni, hogy a szárnyvég lengése lecseng, a VI.5. ábrán feltüntetett 2 másodperces időpillanatban már:

$$\tau = 2[s] \begin{cases} \dot{T}_0 \cong w; \\ \dot{T}_1 = \dot{T}_2 \cong 0; \\ T_1 + T_2 \cong -0.129[m]; \end{cases} \quad (\text{VI.26})$$

vagyis (VI.26) első sora szerint a nulladik saját lengés és a szellőkés sebessége lényegében azonos valamint az első és második saját lengés kitérése (második és harmadik sor) állandósult, vagyis ekkorra a rugalmas repülőgép lényegében együtt mozog a szellőkéssel. Illetve kialakult (mintegy 2 mm eltéréssel) az az állandósult deformáció, amit a kezdeti feltételeknél számítottunk ( $\Rightarrow$  VI.25 kifejezés).

A számítás folyamán – az egyes jellemzők értékének folyamatos figyelésével – megállapítottuk, hogy a legnagyobb gyorsulás a szárnyvégen jött létre, ennek értéke:  $a_{szv\max} = 18.2[m/s^2]$ . Ez a gyorsulás érték valamivel nagyobb, mint a merev repülőgép számításakor kapott  $a_{\max} \cong 17[m/s^2]$  érték. Az értéket tekintve nincs nagy különbség, azonban a rugalmas repülőgép számítása felhívja a figyelmet arra, hogy a szárnyvégen (vagy más helyeken) lehet nagyobb is a helyi gyorsulás és ezzel a helyi terhelés, mint az egész repülőgépre megállapított érték.

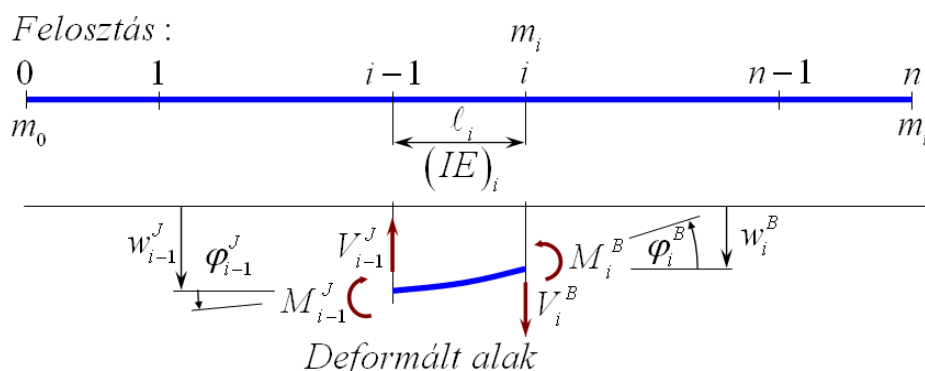
Annál is inkább igaz ez, mert a merev repülőgép vizsgálatokor megállapított, kereken 3.1-szeres szárnytű hajlító nyomaték viszony a rugalmas repülőgép esetében 2.85-re adódik. Ez utóbbi értéket a legnagyobb légerő és tehetetlenségi erő okozta deformáció ( $0.367[m]$ ) és az állandósult légerő-deformáció hányadosaként számítottuk ki. (A súlyerő hatására keletkező deformációval, amely a teljes folyamat során állandó, nem számolunk).

## VII. Sajátlengéskép számítás

Az itt következő részben két, sajátlengéskép számítására alkalmas módszer legegyszerűbb formáját ismertetjük. Ezek a módszerek, különösen az átviteli mátrixok módszere az itt leírtaknál jóval szerteágazóbb, sokféle, további problémára is alkalmazható. Ezzel a módszerrel részletesebben például [11] és [13] foglalkozik.

### VII.1 Az átviteli mátrixok módszere

Az átviteli mátrixok módszere – mint már említettük – egy általános módszer, mi itt csak a pont és szakasz mátrixokkal megvalósítható, egyszerű sajátlengéskép számítási módszerrel foglalkozunk. Tekintsünk egy változó tömegű és változó hajlító merevségű, de egy síkban maradó, lineáris modellel leírható hajlított tartót. (Ez lehet például egy repülőgépi szárny, mondjuk szemből nézve.) A modell a VII.1. ábrán látható:



VII.1. ábra: Hajlított tartó felosztása

A tartó állapotát leíró állapot vektor az alábbi módon adható meg; először általánosan, majd utána a vizsgált szakasz kezdőpontjának jobb és végpontjának bal oldalára:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -w \\ \varphi \\ V \\ M \end{bmatrix} \quad \text{azaz:} \quad \mathbf{q}_{i-j}^J = \begin{bmatrix} -w_{i-1}^J \\ \varphi_{i-1}^J \\ V_{i-1}^J \\ M_{i-1}^J \end{bmatrix} \quad \text{és:} \quad \mathbf{q}_i^B = \begin{bmatrix} -w_i^B \\ \varphi_i^B \\ V_i^B \\ M_i^B \end{bmatrix}; \quad (\text{VII.1})$$

A mechanika alapösszefüggései szerint felírható a VII.1. ábra alsó részén feltüntetett szakasz bal és jobboldali végének állapotvektorai közötti kapcsolat:

$$\begin{aligned} -w_i^B &= -w_{i-1}^J + \varphi_{i-1}^J \ell_i + V_{i-1}^J \ell_i^2 / [2(IE)_i] + M_{i-1}^J \ell_i^3 / [6(IE)_i]; \\ \varphi_i^B &= \varphi_{i-1}^J + V_{i-1}^J \ell_i / (IE)_i + M_{i-1}^J \ell_i^2 / [2(IE)_i]; \\ V_i^B &= V_{i-1}^J + M_{i-1}^J \ell_i; \\ M_i^B &= M_{i-1}^J; \end{aligned} \quad (\text{VII.2})$$

A (VII.2) felírásakor a hajlító deformáció mellett a nyíró deformációt (ez általában a hajlító deformációnál lényegesen kisebb) elhanyagoltuk. Feltettük továbbá, hogy a „szakaszon” terhelés nem hat, ha terhelés lenne, akkor azt a szakasz végpontjába kell elhelyezni. Illetve a szakaszokat ennek (is) megfelelően kell megválasztani.

A szakaszok megválasztása a számítást végző joga, azonban a célszerű megválasztáshoz a külső terhelés és annak elhelyezkedése mellett célszerű a tartó (pl. szárny) jellemzőit is figyelembe venni. Részben eleve viszonylag sok szakaszt kell felvenni, hogy a lineáris kapcsolat megfelelően pontos lehessen, részben ott, ahol valamely jellemző erősen változik, ott célszerű a szakaszokat sűríteni. Hangsúlyozzuk, hogy a sajátlengés számításban külső terhelés nincs – a külső terhelésre vonatkozó megjegyzést csak azért tettük, mert a számítás ilyen esetekre is általánosítható.

A (VII.1) és (VII.2) mátrixos alakban is felírható:

$$\mathbf{q}_i^B = \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{i-1}^J; \quad \text{ahol: } \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & \ell_i & \ell_i^2/[2(\mathbf{IE})_i] & \ell_i^3/[6(\mathbf{IE})_i] \\ 0 & 1 & \ell_i/(\mathbf{IE})_i & \ell_i^2/[2(\mathbf{IE})_i] \\ 0 & 0 & 1 & \ell_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (\text{VII.3})$$

A (VII.3) összefüggés mutatja az általunk vizsgált esetben a *szakasz mátrixot*. A VII.1. ábrán alkalmazott jelölések szerint az  $\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_n$  szakasz mátrixok írható fel, illetve határozható meg.

A következő lépésben a pont mátrixokat határozzuk meg. Koncentráljuk a tartó (szárny) tömegét az egyes pontokba. (Ez azt is jelenti, természetesen, hogy a szakaszoknak nincs tömegük.) A tömeg elosztása – bizonyos keretek között – tetszőleges, javasolható pl. hogy a pontot határoló két szakasz közepétől a pont felé eső tömegeket koncentráljuk a tekintett pontba. A pontokba koncentrált tömegek a sajátlengésekben tehetetlenségi erőt fejtenek ki, ez a (IV.9) összefüggést is tekintetbe véve, a következőképpen írható le (a deformációban a „bal” és a „jobb” indexet az esetünkben elhagyhatjuk, mert szárny sajátlengésének számításában a deformációnak ugrása nem lehet):

$$F_i = m_i \ddot{w}_i = -m_i \omega^2 w_i; \quad (\text{VII.4})$$

Ez tehát azt jelenti, hogy egy-egy pontban a nyíróerő ennyivel „ugrik”, azaz a pont bal oldaláról a jobb oldalára lépve a nyíróerő az alábbi módon alakul:

$$V_i^J = V_i^B - m_i \omega^2 w_i;$$

Ezek szerint az  $i$ -edik pont *pont mátrixa* az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{bmatrix} -w_i^J \\ \varphi_i^J \\ M_i^J \\ V_i^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w_i^B \\ \varphi_i^B \\ M_i^B \\ V_i^B \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_i^J = \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i^B; \quad (\text{VII.5})$$



Megjegyzendő, hogy a sajátkörfrekvencia ( $\omega$ ) jelen pillanatban a sajátlengésképhez hasonlóan ismeretlen. A további számítás során első lépésben éppen a sajátkörfrekvenciát határozzuk majd meg és ennek ismeretében számítjuk az adott sajátkörfrekvenciához tartozó sajátlengésképet.

Az eddigiek ismeretében – a kiinduló állapotvektor ismeretében – végig tudjuk számolni az állapotvektorokat minden pontban:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0^J &= \mathbf{B}_0 \mathbf{q}_0^B; & \mathbf{q}_1^B &= \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_0^J = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0 \mathbf{q}_0^B; \\ \mathbf{q}_1^J &= \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1^B = \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0 \mathbf{q}_0^B; & \Rightarrow \mathbf{q}_i^J &= \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i \dots \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0 \mathbf{q}_0^B; \\ \mathbf{q}_n^J &= \mathbf{B}_n \mathbf{A}_n \dots \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i \dots \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0 \mathbf{q}_0^B & \Rightarrow \mathbf{q}_n^J &= \mathbf{R} \mathbf{q}_0^B; \\ \text{ahol: } \mathbf{R} &= \mathbf{B}_n \mathbf{A}_n \dots \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i \dots \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0; & \text{és } \mathbf{R} &= \mathbf{R}(\omega); \end{aligned} \quad (\text{VII.6})$$

A (VII.1)-gyel definiált állapot vektor két eleme a peremen (pl. a szárnyvégeken) mindig nulla, a másik kettő pedig biztosan nem nulla. Az általánosság mellőzésével tekintsünk egy szárnyvéget: itt a nyomaték és a nyíróerő biztosan nulla lesz, a szárnyvég elmozdulása és az elfordulása pedig nem lesz nulla. Másik lehetséges esetként tekintsünk egy fél-szárnyat, amely fél-szárny a szimmetria síktól indul. Ekkor, a szimmetria síkban az elmozdulás és az elfordulás lesz nulla, a nyomaték és a nyíróerő viszont biztosan nem lesz nulla.

A fentiek szerint, ha a teljes szárnyat vizsgáljuk, akkor:

$$\begin{bmatrix} -w_n^J \\ \varphi_n^J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w_0^B \\ \varphi_0^B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{és: } r_{ij} = r_{ij}(\omega); \quad (\text{VII.7})$$

Ebből homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer írhatunk fel, hiszen ennek az egyenletnek a triviálisól különböző megoldása akkor és csak akkor létezik, ha az együttható mátrix determinánsa zérus (ebben az esetben pedig végtelen sok megoldás van):

$$\begin{cases} 0 = r_{31}(-w_0^B) + r_{32}\varphi_0^B; \\ 0 = r_{41}(-w_0^B) + r_{42}\varphi_0^B; \end{cases} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} r_{31} & r_{32} \\ r_{41} & r_{42} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow r_{31}r_{42} - r_{32}r_{41} = f(\omega) = 0; \quad (\text{VII.8})$$

A számolás következő lépése előtt vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a szárny a szimmetriasíktól tart a szárnyvégig Ekkor:

$$\begin{bmatrix} -w_n^J \\ \varphi_n^J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0^B \\ V_0^B \end{bmatrix}; \quad (\text{VII.9})$$

Ebben az esetben írható, hogy:

$$\begin{cases} 0 = r_{33}M_0^B + r_{34}V_0^B; \\ 0 = r_{43}M_0^B + r_{44}V_0^B; \end{cases} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} r_{33} & r_{34} \\ r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow r_{33}r_{44} - r_{34}r_{43} = f(\omega) = 0; \quad (\text{VII.10})$$

Vagyis mindkét esetben azt kaptuk, hogy az esetnek megfelelő aldeterminánsnak nullának kell lennie. Ez azt jelenti, hogy első lépésben meg kell találni azokat a sajátkörfrekvenciákat, amelyekre a vizsgált aldetermináns értéke nulla lesz. A gyakorlatban ez legtöbbször úgy történik, hogy felvesszünk egy (elegendően kicsi) induló sajátkörfrekvencia értéket és ettől indulva, kis lépésekben növeljük a választott sajátkörfrekvenciát, miközben kiszámítjuk a determinánst.

A számítás során a determináns valamikor előjelet vált. Ekkor, valamilyen algoritmussal (pl. intervallum felezéssel) megkereshető az a sajátkörfrekvencia érték, amelyre a vizsgált determináns (jó közelítéssel) nulla. Figyelni kell arra, hogy a gyakorlati számítások során a determináns abszolút értéke igen nagy, és kis sajátkörfrekvencia lépésre is nagyon nagy értékkel változik.

A sajátkörfrekvencia értékek növelésével megkapjuk a zérushelyek sorozatát. Az első zérushely az első, szimmetrikus sajátlengés sajátkörfrekvenciája; a második az első ferdén szimmetrikus sajátlengés sajátkörfrekvenciája, és így tovább. A VI.1. táblázat záró blokkjának fejléc-sorában megtalálható a számpéldában vizsgált szárnynak a fenti módszerrel számított első és második szimmetrikus sajátlengésének sajátkörfrekvenciája.

Az eljárás záró lépése a sajátlengéskép számítása. Ekkor a megfelelő sajátkörfrekvenciát már ismerjük, tehát minden pont és szakasz mátrix konkrét értéke is ismert.

Sajátlengésképből, amelyet a tekintett homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer alapján számítunk, végtelen sok van. Ez természetes is, illetve megfelel annak, hogy a sajátlengéskép önmagában létezik, tehát a kitérése (amplitúdója) határozatlan. Ebből a halmazból ki kell választani egy elemet – legyen ez megegyezés szerint a végkitérésre normált alak, vagyis:

$$w_0^B = w_0^J := 1; \quad (\text{VII.11})$$

Ezzel már határozottá vált a feladat. Induljunk ki a szárny kezdőpontjától és vizsgáljuk először a két szabad szárnyvég esetét. Ekkor a kezdőpont elfordulása:

$$\begin{cases} 0 = r_{31}(-1) + r_{32}\varphi_0^B; \\ 0 = r_{41}(-1) + r_{42}\varphi_0^B; \end{cases} \Rightarrow \varphi_0^B = \frac{r_{31}}{r_{32}} = \frac{r_{41}}{r_{42}}; \quad (\text{VII.12})$$

Ettől kezdve pedig (VII.6) szerint minden pontban kiszámolható a  $\mathbf{q}$  állapot vektor, ennek az állapot vektornak az első elemeiből alkotott sorozat lesz a tekintett sajátlengéskép kitérésének értéke az egyes (pl. a VII.1. ábra szerinti) pontokban. A számolás végén, az „n”-edik pontban is megkapjuk a kitérést. Ennek (VII.11) szerint, (jó közelítéssel) egynek kell lennie. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a számításban hiba

van. Pl. nem elég pontos a sajátkörfrekvencia értéke. Illetve ez általában jó ellenőrzés: ha teljesül a feltétel, akkor a lengéskép minden bizonnyal rendben van.

A VI.1. táblázat utolsó két sorában ezek a kitérések találhatók; csak a félszárnyra, mert a szimmetria miatt a másik fél szárny adatainak a felsorolása felesleges.

A teljesség kedvéért tekintsük a szimmetria síktól induló szárny esetét. Ebben az esetben a sajátlengéskép számítása nem olyan egyszerű, mint a teljes szárny esetében. Tulajdonképpen a legcélszerűbb ezt a számítást újraszervezni és a sajátlengésképet a teljes szárnyra számolni (a fenti módon), hiszen ehhez minden rész mátrix rendelkezésre áll.

Befejezésül ismét hangsúlyozzuk, hogy a fent ismertetett módszer az itt leírtaknál jóval többre képes, általános bevezetés és számos alkalmazás található a ma már „klasszikusnak” tekinthető [13]-ban.

## VII.2. Sajátlengéskép számítás próbafüggvények segítségével

Ez a sajátkörfrekvencia - sajátlengéskép számítás részben az Euler-Lagrange egyenleten, részben előre adott próbafüggvények megadásán alapul. A (III.1) helyett – mivel külső erő illetve munka nincs – elegendő a sajátlengések számítására vonatkozó, egyszerűbb alakot tekinteni:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) + \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = 0; \quad (\text{VII.13})$$

A kinetikai energia (a korábban bevezetett jelölések felhasználásával) az alábbi formában írható fel:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^R m^* \left( \frac{\partial z_e}{\partial \tau} \right)^2 dy_e; \quad (\text{VII.14})$$

Ezt a számítást csuklós bekötésű rotorlapát esetére végezzük. Ezért az integrálás alsó határa a lapáttó  $y_e$  koordinátája – ennek értéke, ha a csapkodó csukló széthelyezéstől eltekintünk, nulla. A felső határ pedig a rotorlapát hossza, ami egyúttal a rotor sugara ( $R$ ). A rotorlapát választása meghatározza a választandó próbafüggvények néhány tulajdonságát – erről részletesebben a próbafüggvények ismertetésénél lesz szó.

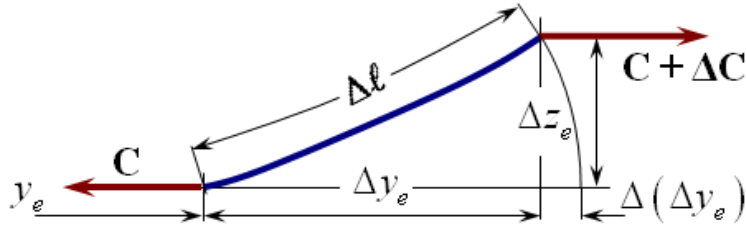
A szakirodalom ajánlásának megfelelően, a továbbiakban dimenziótlan jellemzőkkel számolunk. Válasszuk az alábbi dimenziótlantást, illetve az idő helyett – a helikoptereknél szokott módon – vezessük be az azimút-szöget ( $\Omega$  a rotor <általában állandó> szögsebessége):

$$\hat{z} = z_e/R, \hat{y} = y_e/R \text{ és } \psi_R = \Omega t; \quad (\text{VII.15})$$

Ezzel a mozgási vagy kinetikai energia az alábbi módon írható fel:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^R m^* \left( \frac{\partial z_e}{\partial \tau} \right)^2 dy_e = \frac{1}{2} \int_0^1 m^* \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial \psi_R} \right)^2 \left( \frac{R}{\frac{1}{\Omega}} \right)^2 R d\bar{y} = \frac{R^3 \Omega^2}{2} \int_0^1 m^* \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial \psi_R} \right)^2 d\bar{y}; \quad (\text{VII.16})$$

A következő lépés a potenciális energia felírása. Ez – a centrifugális erőter jelenlétének lehetősége folytán – két részből áll. Tekintsük elsőként a centrifugális erőter ellenében végzett munka révén előálló helyzeti (potenciális) energiát.



VII.2. ábra: Rotorlapát-elem

A VII.2. ábrának megfelelően, a centrifugális erőterben a lapát darab mintegy megrövidül, amely rövidüléshez a centrifugális erő ellenében munkát kell végezni.

A munkavégzésnek megfelelő helyzeti energia változás, elhanyagolva a másodrendűen kis tagokat:

$$\Delta U_{CF} \cong C \Delta(\Delta y_e) = C(\Delta l - \Delta y_e) = C \left[ \sqrt{\Delta z_e^2 + \Delta y_e^2} - \Delta y_e \right]; \quad (\text{VII.17})$$

A (VII.17) kifejezésben a négyzetgyök alatti részt, ismét közelítést alkalmazva, a következő alakban írjuk fel:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta z_e^2 + \Delta y_e^2} &\cong \Delta y_e \sqrt{\left( \frac{\Delta z_e}{\Delta y_e} \right)^2 + 1}; \quad \text{illetve eszerint:} \\ \sqrt{\Delta z_e^2 + \Delta y_e^2} - \Delta y_e &\Rightarrow \left( \sqrt{\left( \frac{dz_e}{dy_e} \right)^2 + 1} - 1 \right) dy_e; \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

A négyzetgyökjel alatti kifejezést hatványsorba fejtvé, és csak az első tagot használva fel, a centrifugális erőter jelenlétéből származó potenciális (helyzeti) energiát az alábbi kifejezés felhasználásával számíthatjuk:

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{\left( \frac{dz_e}{dy_e} \right)^2 + 1} - 1 \right) dy_e &\Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{dz_e}{dy_e} \right)^2 dy_e; \quad \text{ezzel:} \\ U_{CF} &= \frac{1}{2} \int_0^R C(y_e) \left( \frac{dz_e}{dy_e} \right)^2 dy_e = \frac{R}{2} \int_0^1 C(\bar{y}) \left( \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \right)^2 d\bar{y}; \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

A (VII.19) felírásakor, a befejező lépésben ismét áttértünk a dimenziótlan koordináták alkalmazására. Itt jegyezzük meg, hogy a centrifugális erő a hely függvénye (ezt (VII.17)-ben külön is feltüntettük), számítása az alábbi módon lehetséges:

$$\mathbf{C}(y_e) = \int_R^{y_e} m^* \eta_e \Omega^2 d\eta_e; \quad (\text{VII.18})$$

A potenciális energia másik részét a hajlításban lévő energia adja – ezt a mechanika tanítása szerint az alábbi módon számítjuk:

$$U_H = \frac{1}{2} \int_0^R (IE) \left( \frac{d^2 z_e}{dy_e^2} \right)^2 dy_e = \frac{1}{2R} \int_0^1 (IE) \left( \frac{d^2 \hat{z}}{d\hat{y}^2} \right)^2 d\hat{y}; \quad (\text{VII.19})$$

A hajlító merevség ( $IE = IE(y_e)$ ), a centrifugális erőhöz hasonlóan, általában szintén változik, vagyis a lapát menti koordináta függvénye. A (VII.19) felírásakor, a második lépésben ismét csak bevezettük a dimenziótlan koordinátákat. Az integrálásban a dimenziótlan koordináták bevezetése nem jelent problémát, hiszen ettől sem a centrifugális erő, sem a hajlító merevség konkrét értéke nem változik, mindössze a koordináta átszámítás szerint a fenti két függvényt az új, dimenziótlan koordináta függvényében kell értelmezni:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(y_e) = \mathbf{C}(R\hat{y}) \quad \text{és} \quad IE = IE(y_e) = IE(R\hat{y}); \quad (\text{VII.20})$$

Ezzel felírható a teljes helyzeti energia:

$$U = U_{CF} + U_H; \quad (\text{VII.21})$$

A számoláshoz vezessünk be konkrét próbafüggvényeket. Legyenek ezek olyanok, amelyek megfelelnek a csuklós rotorlapát vizsgálatának. A szakirodalom nyomán választott függvények rendszere:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\hat{y}) &= \hat{y}; \\ \gamma_2(\hat{y}) &= 10 \frac{\hat{y}^3}{3} - 10 \frac{\hat{y}^4}{3} + \hat{y}^5; \\ &\dots \\ \gamma_i(\hat{y}) &= (i+2)(i+3) \frac{\hat{y}^{(i+1)}}{6} - i(i+3) \frac{\hat{y}^{(i+2)}}{3} + i(i+1) \frac{\hat{y}^{(i+3)}}{6}; \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{VII.22})$$

A (VII.22) második sorában felírt függvény – természetesen – az utolsó sorbeli, általános kifejezés alapján is számolható lenne – ebbe a sorba csak az első sorban felírt, első próbafüggvény nem illeszkedik. Ez az első próbafüggvény a merev lapát mozgását írja le, ezért a hozzá tartozó sajátkörfrekvencia közelítőleg a rotor szögsebességével egyenlő.

A próbafüggvényekkel kapcsolatban több kérdést is meg kell vizsgálni. Először is megállapítható, hogy minden fenti próbafüggvény (az elsőt is beleértve) értéke nulla a nulla dimenziótlan távolságnál. Illetve egy, az egy dimenziótlan távolság értékénél. (Ezt

tehát ebben az értelemben normált rendszernek tekinthetjük.) A nulla kezdőérték pedig azt fejezi ki, hogy a csapkodó csukló egy helyben maradó pont és minden próbafüggvény, bármely véges kombinációja megtartja ezt a pontot.

Másodszorra vizsgáljuk meg a próbafüggvények deriváltjait. Ebben a tekintetben induljunk ki abból, hogy a deriváltak fizikai jelentése az alábbi:

$$\begin{aligned}\gamma &\Rightarrow \text{elmozdulás}; \quad \gamma' \Rightarrow \text{elfordulás}; \\ \gamma'' &\Rightarrow \text{nyomaték}; \quad \gamma''' \Rightarrow \text{nyíróerő}; \\ (\text{ahol: } \gamma' &= d\gamma_i/d\hat{y}; \quad \text{stb.})\end{aligned}$$

Tekintsük először az első próbafüggvényt: erről rögtön látszik, hogy az első deriváltja állandó (értéke 1), a második és harmadik deriváltja pedig azonosan nulla. A további próbafüggvényekről kimondható, hogy általában:

$$\begin{aligned}\gamma'_i(0) &= 0; \quad \gamma''_i(0) = 0; \quad \gamma'''_i(0) \neq 0; \\ \gamma'_i(1) &\neq 0; \quad \gamma''_i(1) = 0; \quad \gamma'''_i(1) \neq 0; \quad i = 2, 3, \dots, n\end{aligned}$$

Ezek szerint tehát a lapátőben (az  $\hat{y} = 0$  helyen) az  $i \geq 2$  esetben az elfordulás és a nyomaték nulla – a teljes elfordulást az első próbafüggvény hordozza ( $i = 1$ ). A őben a nyíróerő nem nulla.

A lapátvégen (az  $\hat{y} = 1$  helyen) az  $i \geq 2$  esetben az elfordulás nem nulla, de nulla a nyomaték és a nyíróerő nem nulla. Ezzel a (VII.22)-vel definiált próbafüggvények a számunkra fontos (nulla értékű) peremfeltételeket kielégítik, így a tetszőleges lineáris kombinációjuk is megfelel majd a nulla értékű peremfeltételeknek.

Természetesen a (VII.22) helyett más függvények is választhatók – más esetben, amikor például nem rotorlapátról van szó, vagy a rotorlapát bekötése nem csuklós, más bázis függvény rendszert kell választani.

A (VII.22) tehát egy függvénytér bázisaként tekinthető, a sajátlengésképeket ezen bázisfüggvények lineáris kombinációjaként kívánjuk előállítani. A feladat végső célja tehát azoknak a függvénytér koordinátáknak (súlyoknak) a meghatározása, amelyekkel egy-egy sajátlengéskép – közelítőleg – meghatározható.

A számítás következő lépéséhez tegyük fel, hogy a (VII.13) egyenlet megoldása, a dimenziótlan deformáció az alábbi formában írható fel:

$$\tilde{z}(\hat{y}, \psi_R) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\hat{y}) \varphi_i(\psi_R) \quad (\text{VII.23})$$

Ezzel a (VII.16) kinetikai energia az alábbi módon írható fel (vegyük tekintetbe, hogy az összegzés négyzete pontosan megfelel az első sor jobb oldalán álló kétszeres összegzésének):

$$\begin{aligned}
E &= \frac{R^3 \Omega^2}{2} \int_0^1 m^* \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i' \right)^2 d\bar{y} = \frac{R^3 \Omega^2}{2} \int_0^1 m^* \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \gamma_j \phi_i' \phi_j' \right) d\bar{y} = \\
&\frac{R^3 \Omega^2}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i' \phi_j' \left( \int_0^1 m^* \gamma_i \gamma_j d\bar{y} \right) \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i' \phi_j' A_{ij}; \\
\text{ahol: } A_{ij} &= \frac{R^3 \Omega^2}{2} \int_0^1 m^* \gamma_i \gamma_j d\bar{y}; \quad \text{és} \quad \phi_i' = \frac{\partial \phi_i}{\partial \psi_R};
\end{aligned} \tag{VII.24}$$

A (VII.24) egyenletben definiált  $A_{ij}$  együtthatók – a próbafüggvények, a megoszló tömeg, a szögsebesség és a rotor sugár (lapáthossz) ismeretében – kiszámolhatók.

Hasonló módon számolható a potenciális energia is (a próbafüggvények konkrét alakjának ismeretében a hely szerinti első és második derivált minden további nélkül meghatározható):

$$U_{CF} = \frac{R}{2} \int_0^1 \mathbf{C}(\bar{y}) \left( \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \right)^2 d\bar{y} = \frac{R}{2} \int_0^1 \mathbf{C} \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i \right)^2 d\bar{y} = \frac{R}{2} \int_0^1 \mathbf{C} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \gamma_j \phi_i \phi_j \right) d\bar{y}; \tag{VII.25}$$

és:

$$U_H = \frac{1}{2R} \int_0^1 (IE) \left( \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{y}^2} \right)^2 d\bar{y} = \frac{1}{2R} \int_0^1 (IE) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \gamma_j'' \phi_i \phi_j \right); \tag{VII.26}$$

A fenti számolásban is alkalmaztuk a dimenziótlan alak (VII.23) szerinti előállítását, illetve a négyzeteket átírtuk kétszeres összeggé. A két energia összege tehát:

$$\begin{aligned}
U &= U_{CF} + U_H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \phi_j B_{ij}; \quad \text{ahol:} \\
B_{ij} &= \frac{1}{2R} \int_0^1 \left\{ R^2 \mathbf{C} \gamma_i' \gamma_j' + (IE) \gamma_i'' \gamma_j'' \right\} d\bar{y};
\end{aligned} \tag{VII.27}$$

A (VII.27)-ben szereplő  $B_{ij}$  együtthatók – az  $A_{ij}$  együtthatókhöz hasonlóan – a rotorlapát adatainak és működésének ismeretében kiszámolhatók.

Az Euler-Lagrange egyenletben eredetileg az idő szerepel, írjuk át ezt a (VII.15)-ben bevezetett azimút szögére, mint új változóra.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \frac{d}{d\psi_R} \frac{d\psi_R}{dt} = \frac{d}{d\psi_R} \Omega \Rightarrow \frac{d}{d\psi_R} \left( \frac{\partial E}{\partial q_i'} \right) + \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = 0; \\
\text{ahol: } q_i' &= dq_i / d\psi_R;
\end{aligned} \tag{VII.28}$$

A (VII.28)-ban kijelölt deriválásokat elvégezve kapjuk, hogy:

$$\frac{d}{d\psi_R} \left( \frac{\partial E}{\partial q_i'} \right) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \phi_j''; \quad \text{és} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^n B_{ij} \phi_j; \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n B_{ij} \phi_j + \sum_{j=1}^n A_{ij} \phi_j'' = 0; \tag{VII.29}$$

Ebben a jegyzetben már több helyen is bemutattuk, hogy a sajátlengésekben igaz a  $\varphi_i'' = -\lambda_i^2 \varphi_i$  reláció. Ezek szerint (VII.29) átírható az alábbi alakra:

$$\sum_{j=1}^n (B_{ij} - \lambda_j^2 A_{ij}) \varphi_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n (B_{ij} - \lambda_j^2 A_{ij}) k_j = 0; \quad (\text{VII.30})$$

$$\text{hacsak: } \varphi_j = k_j \sin(\lambda_j \psi_R);$$

A (VII.30)-ban a  $k_j$  a  $j$ -edik sajátlengéskép amplitúdóinak  $n$ -elemű halmaza, illetve egy, normáló feltétellel kiegészítve ezek a mennyiségek lesznek az egyes próbafüggvények saját-lengésképbeli súlyát kifejező együtthatók. Másrészt a (VII.30) homogén lineáris algebrai egyenlet rendszer – olyan, amilyen a sajátlengések esetében szükségképpen adódik. Ennek a triviálistól különböző megoldása akkor van, ha az együttható mátrix determinánusa zérus:

$$\det(B_{ij} - \lambda_j^2 A_{ij}) = 0; \quad (\text{VII.31})$$

Mivel pedig az  $A_{ij}$  és a  $B_{ij}$  együtthatók konkrét számértékei valamely, konkrét esetben kiszámolhatók (ismertek), így az első feladat az, hogy meghatározandók azon  $\lambda$  értékek, melyekre a determináns nulla. Ezt rendszerint a „nyers erő” módszerével számítják: a  $\lambda$  értékét valamely szabály szerint változtatva (pl. növelve) eljutunk egy-egy zérus-helyhez.

Valamely zérus-helyhez tartozó  $\lambda$  ismeretében a teljes  $(B_{ij} - \lambda_j^2 A_{ij})$   $n \times n$ -es mátrix meghatározható. (Az „ $n$ ” jelenti azt a számot, ahány próbafüggvényt választottunk). A teljes mátrix ismeretében meghatározhatjuk a valamely (kiválasztott) sora szerinti,  $n$  darab al-determinánst:

legyen  $D_j$  a  $j$ -edik al-determináns ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), akkor:

$$(D_i : D_j) \text{ ahogyan } (k_i : k_j) \text{ és } \sum_{j=1}^n k_j \gamma_j(1) = 1; \quad (\text{VII.32})$$

Ezek szerint egy-egy, valamely  $\lambda$ -hoz tartozó sajátlengéskép a fenti módon állítható össze. A homogén lineáris egyenlet rendszernek, ha létezik a triviálistól különböző megoldása, akkor ebből végtelen sok van – ebből a (VII.32) szerint pontosan egyet a normáló feltétellel választunk ki.

A forgó rotorlapátok esetében az első (legkisebb)  $\lambda$  érték körülbelül egy, ami a merev lapát csapkodó mozgásának felel meg. Ebben az állapotban az első próba függvény ( $\gamma_1$ ) együtthatójának szintén közel egyre kell adódnia, míg a többi próba függvény együtthatójának legalábbis kis értékkel kell rendelkeznie. (Ezek az értékek elvileg nullák kellene legyenek.) Ennek a megállapításnak a felhasználásával a számolás alapszinten ellenőrizhető: ha a fent mondottak teljesülnek, akkor a számolás ebből a szempontból rendben van (más hibák azért lehetnek benne!), ha azonban nem teljesül, akkor a számolás biztosan hibás.



A módszer alkalmazható akkor is, ha nem rotorlapátról van szó – csak a próbafüggvényeket kell megfelelően megválasztani, úgy, hogy a lényeges peremfeltételeket kielégítsék. Illetve alkalmazható akkor is, ha nem hat centrifugális erő, ilyenkor a potenciál megfelelő részét egyszerűen el kell hagyni. Megjegyezzük, hogy csuklós rotorlapát esetében, a centrifugális erő nélküli számolásnak fizikailag nincs értelme, illetve ilyen esetben a számítás – természetesen – matematikailag sem működik.



## Irodalomjegyzék

- [1] BME Repülőgépek Tanszék: Vitorlázó repülőgépek szilárdsági előírása  
*Közlekedési Dokumentációs Vállalat, 1959*
- [2] Bramwell, A.R.S. – Done, G. – Balmford, D.: Helicopter Dynamics  
*Butterworth – Heinemann, Oxford, 2001, ISBN 0 7506 5075 3*
- [3] Cottet, G.H – Koumoutsakos P. D.: Vortex methods  
*Cambridge University Press, 2000, ISBN 0-521-62186-0*
- [4] Dahmen-Reusken: Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler  
*Springer Verlag, 2008, ISBN 978-3-540-76492-2*
- [5] Dowell, E. H. (ed.): A Modern Course in Aeroelasticity  
*Kluwer Academic Publishers, 1995*
- [6] Försting, H. W.: Grundlagen der Aeroelastik  
*Springer Verlag, 1974*
- [7] Géry, P.-M. – Calgaro, J.-A.: Les Matrices Transfert dans le Calcul des Structures, *Éditions Eyrolles, Paris, 1973.*
- [8] Halfman, R. L. – Ashley, H. – Bisplinghoff, R. L.: Aeroelasticity  
*Addison-Wesley PC: 1955*
- [9] Hodges, D. H. – Pierce, G.A.: Introduction to Structural Dynamics and Aeroelsticity *Cambridge, 2001*
- [10] Leishman, J.G.: Principles of Helicopter Aerodynamics  
*Cambridge University Press, 2000, ISBN 0-521-66060-2*
- [11] Ludwig, Gy.: Gépek dinamikája  
*Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.*
- [12] Meyer, M. – Matthies, H.G.: State-space representation of instationary two-dimensional airfoil aerodynamics, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 92 (2004) pp. 263–274*
- [13] Pestel, E.C. – Leckie, F.A.: Matrix Methods in Elastomechanics  
*McGraw-Hill Book Company, New York, 1963, ISBN 07-049520-3*
- [14] Peters, D.A.: Two-dimensional incompressible unsteady airfoil theory – an overview, *Journal of Fluids and Structures, 24 (2008), pp. 295-312*
- [15] Prouty, R.W.: Helicopter Performance, Stability, and Control, *Krieger PC. INC., Malabar, Florida, 1986*
- [16] Rácz, E. – Varga, L. – Varga, L.: Repülőgépek szerkezete és rugalmassága;  
*Tankönyvkiadó, 1962*
- [17] Rosenbaum, R.: Simplified Flutter Prevention Criteria for Personal Type of Aircraft, *Airframe and Equipment Engineering Report No. 45, FAA, 1955*
- [18] Scanlan, R. H. – Rosenbaum, R.: Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter; *The Macmillan Co. 1951*
- [19] Schmidt, T.: Schwingungsprobleme im Flugzeugbau  
*ZLL, Dresden, 1959.*

- 
- [20] Student4Aerodynamics  
<http://www.aeromech.usyd.edu.au/aero/aeroelastic/index.shtml>
- [21] Szabolcsi, R.: Modern automatikus repülésszabályozó rendszerek  
*Egyetemi tankönyv, 2011*
- [22] Tobak, M.: On the use of the indicial function concept in the analysis of unsteady motions of wings and wing-tail combinations, *NACA Report No. 1188, 1976*
- [23] Tran, C.T. – Falchero, D.: Application of the ONERA dynamic stall model to a helicopter blade in forward flight,  
*Vertica, Vol. 6. pp. 219-239*
- [24] Wright, J.R. – Cooper, J. E.: Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads, *John Wiley and Sons, 2007*